Σύντομες σημειώσεις και ασκήσεις σε

Ευστάθεια και σύγκλιση αλυσίδων Markov[1]

για χρήση στο μάθημα «Στοχαστικές Διαδικασίες»

Τακης Κωνσταντοπουλος

10/11/04

Όλες οι ασκήσεις που διατυπώνονται στο κείμενο αυτό πρέπει να λυθούν και να παραδοθούν μέχρι τις 15/12/04. Θα μετρήσουν για το 45% του τελικού βαθμού. Ο καθένας πρέπει να παραδώσει ξεχωριστό γραπτό και πρέπει να είναι σε θέση να εξηγήσει οτιδήποτε γράφει, στην περίπτωση που ερωτηθεί. Αν αντιγράψετε θα μηδενίσω το (ή τα) γραπτό(ά) σας.

1 Υπενθύμιση βασικών εννοιών και προτάσεων

Η παράγραφος αυτή περιέχει πολλές βασικές έννοιες και διάφορες προτάσεις σχετικά με αυτές. Οι αποδείξεις των προτάσεων είναι στο βιβλίο σας. Συνιστάται να τις καταλάβετε όλες.

Μια ακολουθία $(X_n, n = 0, 1, 2, \ldots)$ απο τ.μ. λέγεται Markov αν, για κάθε n, το παρελθόν $(X_k, k < n)$ είναι ανεξάρτητο από το μέλλον $(X_k, k > n)$, δεδομένου του παρόντος X_n.

Η κατανομή κάθε ακολουθίας (διαδικασίας, αλυσίδας) Markov προσδιορίζεται από την κατανομή της X_0 και την κατανομή της X_n δεδομένου της X_{n-1}, για κάθε n. Π.χ., αν οι X_n παίρνουν τιμές σε ένα αριθμήσιμο σύνολο S (πράγμα που θα υποθέσουμε ακολούθως) έχουμε[2]

$$\begin{aligned}P(X_n = j) &= \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j) \\ &= \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}} P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots \\ &\qquad\qquad \cdots P(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}).\end{aligned}$$

[1] Το κείμενο αυτό υπάρχει και στο `http://www.math.upatras.gr/~tkteach`

[2] Όπου γράφουμε $\sum_i$ χωρίς να προσδιορίζουμε που κυμαίνεται το i, εννούμε $\sum_{i \in S}$.

Η διαδικασία λέγεται ΧΡΟΝΙΚΑ ΟΜΟΓΕΝΗΣ αν η κατανομή της X_n δεδομένης της X_{n-1} δεν εξαρτάται από το n.

Στην περίπτωση που το S έχει τη δομή της αντιμεταθετικής ομάδας με την πράξη $*$ τότε λέμε ότι η διαδικασία είναι ΧΩΡΙΚΑ ΟΜΟΓΕΝΗΣ αν, για κάθε n και κάθε $x \in S$, η κατανομή της X_n δεδομένης της X_{n-1} είναι ίδια με την κατανομή της $x * X_n$ δεδομένης της $x * X_{n-1}$. Μια χωρικά ομογενής αλυσίδα στην ομάδα $S = Z^d$ των d-διάστατων διανυσμάτων με ακέραια στοιχεία με πράξη την πρόσθεση λέγεται ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ.

Τα στοιχεία του S λέγονται και ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ (ή τιμές) της διαδικασίας.

Θα θεωρήσουμε μόνο χρονικά ομογενείς διαδικασίες. Στην περίπτωση αυτή, έστω

$$p_{i,j} := P(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad i, j \in S.$$

Οι αριθμόι αυτοί λέγονται ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ. Έχουμε, προφανώς, $p_{i,j} \geq 0$, και $\sum_j p_{i,j} = 1$.

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση[3] $P : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ οριζόμενη από τη σχέση

$$\mu \mapsto \mu P$$
$$(\mu P)(i) = \sum_{i \in S} \mu(j) p_{j,i}$$

Η απεικόνιση αυτή λέγεται *τελεστής μετάβασης* σε ένα βήμα. Η έννοια του είναι η εξής: Αν $\mu_n(i) := P(X_n = i)$ τότε $\mu_n = \mu_{n-1}P$. Επομένως $\mu_n = (\mu_{n-2}P)P = \mu_{n-2}P^2$, όπου P^k δηλώνει σύνθεση k του P φορές με τον εαυτό του. Άρα $\mu_n = \mu_0 P^n$.

Στην περίπτωση που το S έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, έστω δηλ. d στοιχεία, τότε το $\mathbb{R}^S$ είναι ισομορφικό με το $\mathbb{R}^d$, και άρα ο P είναι μια γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^d$ στο $\mathbb{R}^d$. Άρα, αν διατάξουμε τα στοιχεία του S, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον P με έναν πίνακα. Ο πίνακας αυτός, που συμβολίζεται[4] και πάλι με P έχει στοιχεία $p_{i,j}$. Και άρα P^n σημαίνει ύψωση του P στη n-στη δύναμη.

Μιλώντας πάντα για χρονικά ομογενείς αλυσίδες Markov, θα πούμε ότι η κατανομή πιθανότητας[5] π είναι ΣΤΑΣΙΜΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ αν $\mu_0 = \pi \Rightarrow \mu_n = \pi$, για κάθε n. Είναι προφανές ότι αν η παραπάνω συνεπαγωγή ισχύει για $n = 1$,

[3]Συγγνώμη που χρησιμοποιούμε το σύμβολο P ξανά.

[4]Ξανά συγγνώμη!

[5]Μια ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ν σε ένα αριθμήσιμο σύνολο S είναι μια συλλογή από μη αρνητικούς αριθμούς $\{\nu(i), i \in S\}$ έτσι ώστε $\sum_i \nu(i) = 1$.

τότε ισχύει για κάθε n, και ότι η π είναι στάσιμη κατανομή αν και μόνο αν $\pi = \pi P$.

Επίσης, άν η π είναι στάσιμη κατανομή και αν $P(X_0 = i) = \pi(i)$, τότε οι πιθανότητες

$$P(X_k = i_k, X_{k+1} = i_{k+1}, \ldots, X_{k+n} = i_{k+n}),$$

δεν εξαρτώνται απο το k. Με άλλα λόγια,[6]

$$\forall k \quad (X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+n}) \sim (X_0, X_1, \ldots X_n).$$

Το τελευταίο σημαίνει (ορισμός!) ότι η διαδικασία $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ είναι ΣΤΑΣΙΜΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ.

Ο συμβολισμός $P_i(A)$ σημαίνει $P(A|X_0 = i)$. Ο συμβολισμός $E_i(Z)$ σημαίνει $E(Z|X_0 = i)$.

Για κάθε $i \in S$ θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$T_i := \inf\{n \geq 1 : \ X_n = i\}$$
$$T_i' := \inf\{n \geq 0 : \ X_n = i\}.$$

Αυτές παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα $\{T_i \leq n\}$, $\{T_i' \leq n\}$ προσδιορίζονται πλήρως από τις $(X_0, \ldots, X_n)$, για κάθε n, αφού $\{T_i > n\} = \{X_1 \neq i, \ldots, X_n \neq i\}$, $\{T_i' > n\} = \{X_0 \neq i, X_1 \neq i, \ldots, X_n \neq i\}$.

Λέμε ότι η i ΟΔΗΓΕΙ στην j αν $P_i(T_j < \infty) > 0$. Αυτό το συμβολίζουμε με $i \to j$. Αν η i δεν οδηγεί στην j γράφουμε $i \not\to j$. Λέμε ότι η i ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ με τη j αν $i \to j$ και $j \to i$. Γράφουμε $i \leftrightarrow j$. Λέμε ότι η i είναι ΜΗ ΟΥΣΙΩΔΗΣ αν υπάρχει j με $i \to j$ αλλά $j \not\to i$. Η i είναι ΟΥΣΙΩΔΗΣ αν δεν είναι μη ουσιώδης. Έστω S_o το σύνολο των ουσιοδών καταστάσεων. Η σχέση $i \leftrightarrow j$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο S_o. Οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται και ΚΛΑΣΕΙΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ. Αν $S = S_o$ και υπάρχει μόνο μια κλάση επικοινωνίας τότε η αλυσίδα λέγεται ΜΗ ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΗ (IRREDUCIBLE). Με άλλα λόγια, για μια μη διαχωρίσιμη αλυσίδα έχουμε $i \leftrightarrow j$ για κάθε $i, j \in S$.

Μια κατάσταση i λέγεται ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ (RECURRENT) αν $P_i(T_i < \infty) = 1$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $P_i(X_n = i \text{ για άπειρα } n\ ) = 1$. Μια κατάσταση i λέγεται ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ (TRANSIENT) αν δεν είναι επαναληπτική,

[6] Το σύμβολο $W_1 \sim W_2$ σημαίνει ότι το τυχαίο αντικείμενο W_1 έχει την ίδια κατανομή με το W_2.

δηλαδή αν $P_i(T_i = \infty) > 0$, πράγμα που είναι ισοδύναμο με το $P_i(X_n = i \text{ για άπειρα } n\ ) = 0$.

Αν μια κατάσταση i είναι μη ουσιώδης τότε είναι μεταβατική.

Μια επαναληπτική κατάσταση i λέγεται ΘΕΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ (POSITIVE RECURRENT) αν $E_i T_i < \infty$. Μια επαναληπτική κατάσταση i λέγεται ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ (NULL RECURRENT) αν $E_i T_i = \infty$. Αν $i \leftrightarrow j$ και η i είναι θετικά επαναληπτική (μηδενικά επαναληπτική, μεταβατική), τότε και η j είναι θετικά επαναληπτική (μηδενικά επαναληπτική, μεταβατική, αντίστοιχα).

Αν η αλυσίδα είναι μη διαχωρίσιμη τότε ισχύει ένα από τα επόμενα: Ή όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές, ή όλες είναι μηδενικά επαναληπτικές, ή όλες είναι μεταβατικές.

Η ΠΕΡΙΟΔΟΣ μιας κατάστασης i είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των n για τα οποία $P_i(X_n = i) > 0$. Η i λέγεται ΑΠΕΡΙΟΔΙΚΗ αν η περίοδός της είναι μονάδα. Αν $i \leftrightarrow j$ τότε και οι δύο καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο. Μια μη διαχωρίσιμη αλυσίδα λέγεται απεριοδική αν μια (και επομένως όλες) οι καταστάσεις της έχουν περίοδο μονάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Έστω (X_n), (X'_n) ανεξάρτητες αλυσίδες Markov στο σύνολο S με τις ίδιες πιθανότητες μετάβασης. Ορίζουμε $Z_n = (X_n, X'_n)$. Να δειχτεί ότι:*
(ι) Η (Z_n) είναι κι αυτή Markov (στο σύνολο $S \times S$).
(ιι) Αν η (X_n) είναι μη διαχωρίσιμη και απεριοδική τότε η (Z_n) είναι μη διαχωρίσιμη.

Κάθε αλυσίδα Markov είναι και ΙΣΧΥΡΑ MARKOV με την έννοια ότι αν T είναι μια πεπερασμένη τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ και την ιδιότητα ότι το γεγονός $\{T \leq n\}$ προσδιορίζεται πλήρως από τις $(X_0, \ldots, X_n)$, για κάθε n, τότε $(X_0, \ldots X_{T-1})$ είναι ανεξάρτητο από το $(X_{T+1}, X_{T+2}, \ldots)$, δεδομένου του X_T.

Ένας ΓΡΑΦΟΣ (GRAPH) είναι ένα ζευγάρι από αριθμήσιμα σύνολα (V, E), έτσι ώστε $E \subseteq V \times V$ με την ιδιότητα $(\star)$ $(i, j) \in E \Leftrightarrow (j, i) \in E$. Τα στοιχεία του V λέγονται ΚΟΡΥΦΕΣ (VERTICES) του γράφου, τα δε στοιχεία του E λέγονται ΑΚΜΕΣ (EDGES). Για την ακρίβεια, λόγω του ότι δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη, γράφουμε $\{i, j\}$ για την ακμή (i, j), την οποία ταυτίζουμε με την (j, i). Ενας ΔΙΓΡΑΦΟΣ (DIGRAPH) είναι ότι ένας γράφος, μόνο που ότι μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός, δηλαδή λείπει η ιδιότητα $(\star)$. Ένας διγράφος λέγεται (ΙΣΧΥΡΑ) ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΣ αν για κάθε $i, j \in V$, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_k \in V$ έτσι ώστε $(i, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_k, j) \in E$. Ο διγράφος μιας αλυσίδας Markoν με πιθανότητες μετάβασης $p_{i,j}, i, j \in S$ ορίζεται από τα: (α) $V = S$, (β) $E = \{(i,j) \in S \times S : p_{i,j} > 0\}$. Ο διγράφος αυτός είναι ισχυρά συνεκτικός αν και μόνο αν η αλυσίδα είναι μη διαχωρίσιμη. Ένας ΑΠΛΟΣ ΚΥΚΛΟΣ (SIMPLE LOOP) ενός διγράφου (V, E) είναι μιά ακολουθία από ξένες μεταξύ τους κορυφές $i_1, \ldots, i_n$ έτσι ώστε $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1) \in E$. Μιά συνάρτηση $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ λέγεται ΡΕΥΜΑ (CURRENT) αν ισχύει ότι:

$$\forall A \subseteq S \quad \sum_{i \in A} \sum_{j \in S-A} \varphi(i,j) = \sum_{i \in S-A} \sum_{j \in A} \varphi(i,j). \tag{1}$$

Η σχέση (1) ονομάζεται και ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ KIRCHHOFF.

ΑΣΚΗΣΗ 2. *Θεωρούμε μια αλυσίδα Markov με πιθανότητες μετάβασης* $p_{i,j}, i, j \in S$ *και στάσιμη κατανομή (υποθέτουμε ότι υπάρχει)* π. *Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\varphi : E \to \mathbb{R}_+; \quad \varphi(i,j) = \pi(i) p_{i,j}.$$

Να δείξετε ότι η φ *είναι ρεύμα (δηλαδή ότι ικανοποιεί το νόμο του Kirchhoff).*

2 Κατασκευή στάσιμης κατανομής

Θεωρούμε μια μη διαχωρίσιμη και θετικά επαναληπτική αλυσίδα Markov με τιμές στο αριθμήσιμο σύνολο S. Έστω a ένα συγκεκριμένο στοιχείο του S Ορίζουμε την ποσότητα

$$\nu(i) := E_a \sum_{n=0}^{T_a - 1} \mathbf{1}(X_n = i), \quad i \in S. \tag{2}$$

Λόγω θετικής επαναληπτικότητας, $\sum_i \nu(i) = E_i T_i < \infty$, και άρα τα

$$\pi(i) := \frac{\nu(i)}{E_a T_a}, \quad i \in S, \tag{3}$$

αποτελούν μια κατανομή πιθανότητας στο S.

Θεώρημα 1. *Η* π *που ορίζεται από τις (2)-(3) είναι στάσιμη κατανομή.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\nu(i) = \sum_j \nu(j) p_{j,i},$$

όπου $p_{j,i} = P(X_n = i | X_{n-1} = j)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \nu(i) &= E_a \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}(n < T_a, X_n = i) \\ &= E_a \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a, X_n \neq a, X_n = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_a(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a, X_n \neq a, X_n = i). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Χρησιμοποιήστε τη χρονική ομογένεια και την ιδιότητα Markov για να τελειώσετε την απόδειξη.*

□

3 Σύγκλιση

Θεωρούμε μια μη διαχωρίσιμη, θετικά επαναληπτική μαι απεριοδική αλυσίδα Markov με τιμές στο αριθμήσιμο σύνολο S.

Θεώρημα 2. *Έστω π η κατανομή που ορίζεται από τις (2)-(3). Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi(i),$$

για κάθε i στο S, και για κάθε αρχική κατάσταση X_0.

Απόδειξη. Έστω (X'_n) μια αλυσίδα Markov με πιθανότητες μετάβασης ίδιες με αυτές της (X_n), αλλά με $P(X'_0 = i) = \pi(i)$. Από το Θεώρημα 1, η π είναι στάσιμη κατανομή και άρα η αλυσίδα (X'_n) είναι στάσιμη, και άρα $P(X'_n = i) = \pi(i)$, για κάθε n. Έστω

$$T := \inf\{n \geq 1 : \ X_n = X'_n\}.$$

Από την Άσκηση 3, έχουμε ότι η (X_n, X'_n) είναι μη διαχωρίσιμη και άρα για οποιαδήποτε κατάσταση $x \in S$, έχουμε ότι $P(\inf\{n \geq 1 : \ (X_n, X'_n) = (x,x)\} < \infty) = 1$. Άρα $P(T < \infty) = 1$. Ορίζουμε τώρα τις

$$X''_n := \begin{cases} X_n, \ n < T \\ X'_n, \ n \geq T \end{cases} .$$

ΑΣΚΗΣΗ 4. *Να δειχτεί ότι η* (X''_n) *είναι κι αυτή Markov με κατανομή ίδια με της* (X_n).

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} P(X_n = i) &= P(X''_n = i) && \text{[λόγω της Ασκ. 4]} \\ &= P(X''_n = i, n < T) + P(X''_n = i, n \geq T) \\ &= P(X_n = i, n < T) + P(X'_n = i, n \geq T) \\ &\leq P(n < T) + P(X'_n = i) \\ &= P(T > n) + \pi(i) && \text{[λόγω του ότι η } X'_n \text{ έχει κατανομή } \pi], \end{aligned}$$

και άρα

$$P(X_n = i) - \pi(i) \leq P(T > n). \tag{4}$$

Ανάλογα, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(i) &= P(X'_n = i) && \text{[λόγω του ότι η } X'_n \text{ έχει κατανομή } \pi] \\ &= P(X'_n = i, n < T) + P(X'_n = i, n \geq T) \\ &= P(X'_n = i, n < T) + P(X''_n = i, n \geq T) \\ &\leq P(n < T) + P(X''_n = i) \\ &\leq P(n < T) + P(X_n = i), \end{aligned}$$

και άρα

$$\pi(i) - P(X_n = i) \leq P(T > n). \tag{5}$$

Συνδυάζοντας τις (4), (5), έχουμε

$$|P(X_n = i) - \pi(i)| \leq P(T > n).$$

Αλλά $P(T = \infty) = 0$. Άρα $\lim_{n \to \infty} P(T > n) = 0$. Και άρα $\lim_{n\to\infty} |P(X_n = i) - \pi(i)| = 0$. □

4 Μοναδικότητα στάσιμης κατανομής

Θεώρημα 3. *Θεωρούμε μια μη διαχωρίσιμη, θετικά επαναληπτική αλυσίδα Markov. Τότε υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη ότι υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π, που ορίζεται από τις (2)-(3). Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η αλυσίδα είναι απεριοδική. Έστω ότι π' είναι άλλη στάσιμη κατανομή. Θέτουμε $P(X_0 = i) = \pi'(i)$. Τότε, αφού η π' είναι στάσιμη, έχουμε $P(X_n = i) = \pi'(i)$, για κάθε n. Αφού όμως η $P(X_n = i)$ έχει όριο $\pi(i)$ (βλ. Θεώρημα 2), συμπεραίνουμε ότι $\pi(i) = \pi'(i)$.

ΑΣΚΗΣΗ 5. *Συνεχίστε την απόδειξη και στην περίπτωση της περιοδικής αλυσίδας.*

□

Παρατήρηση: Αν η αλυσίδα Markov είναι μη διαχωρίσιμη και θετικά επαναληπτική, τότε, για κάθε $i \in S$, έχουμε

$$\pi(i) = 1/E_i T_i.$$

Αυτό προκύπτει από τις (2)-(3) θέτοντας $a = i$.

5 Αναστροφή χρόνου

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Αν η $(X_n, 0 \le n \le N)$ έχει την ιδιότητα Markov τότε και η $(X_{N-n}, 0 \le n \le N)$ έχει την ιδιότητα Markov αφού η ιδιότητα Markov είναι συμμετρική ως προς το παρελθόν και το μέλλον. Η $(X_{N-n}, 0 \le n \le N)$ λέγεται η ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ της $(X_n, 0 \le n \le N)$.

ΑΣΚΗΣΗ 6. *Να δειχτεί, με παράδειγμα, ότι η $(X_{N-n}, 0 \le n \le N)$ μπορεί να μην είναι χρονικά ομογενής ακόμα κι αν η $(X_n, 0 \le n \le N)$ είναι χρονικά ομογενής.*

Αν π είναι στάσιμη κατανομή για την (X_n), και αν $P(X_0 = i) = \pi(i)$, τότε η $(X'_n := X_{N-n}, 0 \le n \le N)$ είναι χρονικά ομογενής με πιθανότητες μετάβασης

$$p'_{i,j} = P(X'_{n+1} = j | X'_n = i) = \frac{p_{j,i}\pi(j)}{\pi(i)}.$$

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
P(X'_{n+1}=j|X'_n=i) &= \frac{P(X'_{n+1}=j, X'_n=i)}{P(X'_n=i)} \\
&= \frac{P(X'_n=i|X'_{n+1}=j)P(X'_{n+1}=j)}{P(X'_n=i)} \\
&= \frac{P(X_{N-n}=i|X_{N-n-1}=j)P(X_{N-n-1}=j)}{P(X_{N-n}=i)} \\
&= \frac{p_{j,i}\pi(j)}{\pi(i)}.
\end{aligned}
$$

Επίσης, η $(X_{N-n}, 0 \le n \le N)$ είναι κι αυτή στάσιμη με στάσιμη κατανομή π.

Η (X_n) λέγεται ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΗ αν είναι ευσταθής με στάσιμη κατανομή π και αν

$$\forall N \quad (X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}, X_N) \sim (X_N, X_{N-1}, \ldots, X_1, X_0),$$

δηλαδή αν $p'_{i,j} = p_{i,j}$, $i,j \in S$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει κατανομή π έτσι ώστε

$$\pi(i)p_{i,j} = \pi(j)p_{j,i}, \quad i,j \in S,$$

τότε η (X_n) είναι χρονικά αναστρέψιμη και η π είναι στάσιμη κατανομή (και για τη (X_n) και για τη χρονική ανάστροφή της). Αν θυμηθούμε ότι η συνάρτηση $\varphi(i,j) = \pi(i)p_{i,j}$ είναι ρεύμα (Άσκηση 2), τότε η σχέση της χρονικής αναστρεψιμότητας είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι $\varphi(i,j) = \varphi(j,i)$ για κάθε $i,j \in S$, δηλαδή το ρεύμα είναι αμφίδρομο.

ΑΣΚΗΣΗ 7. *Θεωρείστε μια αλυσίδα Markov σε ένα πεπερασμένο σύνολο S. Να δείξετε ότι αυτή είναι χρονικά αναστρέψιμη αν και μόνο αν, για κάθε απλό κύκλο $(i_1, \ldots, i_n)$ έχουμε*

$$p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{n-1},i_n}p_{i_n,i_1} = p_{i_1,i_n}p_{i_n,i_{n-1}}\cdots p_{i_3,i_2}p_{i_2,i_1}.$$

Έστω (V,E) ένας γράφος όπου το V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με $|V|$ στοιχεία. Για κάθε $i \in V$ ορίζουμε το σύνολο των γειτόνων του $N(i) = \{j \in V : \{i,j\}$ είναι ακμή$\}$. Ορίζουμε επίσης

$$p_{i,j} := \frac{1}{|N(i)|}\mathbf{1}(j \in N(i)), \quad i,j,\in V.$$

Παρατηρείστε ότι τα $p_{i,j}$ αποτελούν πιθανότητες μετάβασης κάποιας αλυσίδας αφού είναι μη αρνητικά και $\sum_{j\in V} p_{i,j} = 1$, για όλα τα $i \in V$. Η αντίστοιχη αλυσίδα λέγεται ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΓΡΑΦΟ (V,E).

ΑΣΚΗΣΗ 8. *Υποθέστε ότι ο γράφος (V, E) είναι συνεκτικός και θεωρείστε τον τυχαίο περίπατο στο γράφο αυτό. Δείξτε ότι αυτός αποτελεί πάντα μια χρονικά αναστρέψιμη αλυσίδα Markov με στάσιμη κατανομή που δίνεται από τη σχέση $\pi(i) = c|N(i)|$, όπου c κατάλληλη σταθερά. (Με τι ισούται η c;).*
Θεωρείστε τώρα μια σκακιέρα με $8 \times 8 = 64$ τετράγωνα και ένα μοναδικό άλογο το οποίο ξεκινάει από το κάτω αριστερά γωνιακό τετράγωνο και κινείται στην τύχη σε διακριτά βήματα. Να βρεθεί πόσα, κατά μέσο όρο, βήματα χρειάζονται για να ξαναγυρίσει το άλογο στο αρχικό τετράγωνο (έτσι δείξτε ότι θα ξαναγυρίσει με πιθανότητα 1).

6 Δυναμικά συστήματα

Ένα ΔΥΝΑΜΙΚΟ σύστημα σε ένα σύνολο S είναι μια οικογένεια από μετασχηματισμούς $\psi_{s,t} : S \to S$, όπου τα s, t είναι ακέραιοι ή πραγματικοί αριθμοί, με $s < t$, και οι οποίοι μετασχηματισμοί αποτελούν ΗΜΙΟΜΑΔΑ, δηλαδή

$$\begin{aligned} &(i) \quad \psi_{t,t} = \text{ ταυτοτική απεικόνιση}, \\ &(ii) \quad s < t < u \Rightarrow \psi_{s,u} = \psi_{t,u} \circ \psi_{s,t}, \end{aligned}$$

όπου $\circ$ δηλώνει σύνθεση. Με άλλα λόγια, αν φανταστούμε ότι τη 'χρονική στιγμή s' το 'σύστημα' είναι στην 'κατάσταση' $x \in S$ τότε σε κάποια μέλλουσα χρονική στιγμή u θα είναι στην κατάσταση $z = \psi_{s,u}(x)$. Αν, σε μια ενδιάμεση χρονική στιγμή t, είναι στην κατάσταση $y = \psi_{s,t}(x)$, τότε η κατάσταση z είναι συνάρτηση μόνο της ενδιάμεσης κατάστασης y (και όχι του τι συνέβαινε πριν), δηλαδή $z = \psi_{t,u}(y)$.

Ένα δυναμικό σύστημα λέγεται ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ αν οι $\psi_{s,t}$ εάιναι τυχαίες συναρτήσεις. Μέ άλλα λόγια, αν, σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων Ω, ορίζονται συναρτήσεις

$$\Psi_{s,t} : \Omega \to \mathfrak{G},$$

όπου $\mathfrak{G}$ είναι ένα υποσύνολο του S^S. Έτσι, αν $X_0 : \Omega \to S$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που υποδηλώνει την αρχική κατάσταση του συστήματος, μπορούμε να ορίσουμε την

$$X_t(\omega) = \Psi_{0,t}(X_0(\omega), \omega),$$

σαν την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t \geq 0$.

Ένα βασικό παράδειγμα: Έστω S ένα αριθμήσιμο σύνολο και έστω

$$f : S \times [0, 1] \to S,$$

μια σύναρτηση δύο μεταβλητών, η πρώτη απο τις οποίες ανήκει στο S, ενώ η δεύτερη είναι πραγματικός αριθμός στο διάστημα $[0,1]$. Έστω $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όλες ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0,1]$. Ορίζουμε την τυχαία συναρτήση

$$\varphi_n(x, \omega) := f(x, \xi_n(\omega)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και, όπως συνηθίζεται στις πιθανότητες, παραλείπουμε το να δηλώσουμε τη μεταβλητή ω, γράφοντας απλώς

$$\varphi_n(x) = f(x, \xi_n).$$

Μετά ορίζουμε, αναδρομικά,

$$\psi_{m,m} = \text{ ταυτοτική απεικόνιση},$$
$$\psi_{m,n} = \varphi_n \circ \psi_{m,n-1}, \quad n > m.$$

Τότε, το δυναμικό σύστημα $\{\psi_{m,n}\}$ οδηγεί σε μια χρονικά ομογενή διαδικασία Markov:

$$X_{n+1} = \varphi_n(X_n) = f(X_n, \xi_n).$$

ΑΣΚΗΣΗ 9. *Σε αυτό το παράδειγμα, δείξτε τους ισχυρισμούς ότι: (α) Η (X_n) είναι Markov, (β) είναι χρονικά ομογενής. Επίσης δείξτε ότι (γ) $X_n = \psi_{m,n}(X_m)$, για κάθε $m \le n$, και (δ) υπολογίστε τις πιθανότητες μεάβασης $p_{i,j}$. Τέλος, δείξτε το αντίστροφο: Έστω ότι (X_n) είναι μια χρονικά ομογενής αλυσίδα Markov στο S, με πιθανότητες μετάβασης $p_{i,j}$. Κατασκευάστε συνάρτηση f έτσι ώστε $X_{n+1} = f(X_n, \xi_n)$, με (ξ_n) ανεξάρτητες, ομοιόμορφες στο $[0,1]$.*

Πιό γενικά, θεωρούμε δυναμικά συστήματα που ορίζονται από αναδρομικές σχέσεις της μορφής

$$X_{n+1} = \varphi_n(X_n) = f(X_n, \xi_n),$$

αλλά όπου *δεν υποθέτουμε ότι οι (ξ_n) είναι ανεξάρτητες*. Θα τελειώσουμε την παράγραφο αυτή με δύο προβλήματα:

1. Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ (STATIONARITY). Αν η (ξ_n) είναι στάσιμη στοχαστική διαδικασία, τότε το πρόβλημα της στασιμότητας αναζητά συνθήκες κάτω από της οποίες και η (X_n) είναι στάσιμη στοχαστική διαδικασία.
2. Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ (STABILITY). Το πρόβλημα της ευστάθειας αναζητά συνθήκες κάτω από της οποίες η πιθανότητα $P(X_n = x)$ έχει όριο όταν $n \to \infty$, και το όριο αυτό είναι κατανομή πιθανότητας.

Στις σημειώσεις αυτές δώσαμε απαντήσεις για τα δυο αυτά προβλήματα σε συγκεκριμένα στοχαστικά δυναμικά συστήματα τα οποία είναι Markov.

7 Μια εφαρμογή

Όταν συνδέεστε στο Internet μέσω κάποιου υπολογιστή στο εργαστήριο υπολογιστών, τρέχει κάποιο πρωτόκολλο επικοινωνίας που λέγεται Ethernet. Αυτό μπορεί να περιγραφεί σαν ένα στοχαστικό δυναμικό σύστημα. Μια πρωτόγονη μορφή (Aloha) του Ethernet είναι η εξής:

Σε ένα δίκτυο είναι συνδεδεμένοι N χρήστες (μέσω, π.χ., N διαφορετικών υπολογιστών). Οι χρήστες στέλνουν πακέτα στο δίκτυο. Κάθε χρονική στιγμή, ο χρήστης m έχει έναν αριθμό από πακέτα. Τα πακέτα αυτά αποτελούνται από «παλιά» πακέτα (που ήταν ήδη στη μνήμη του υπολογιστή του) και, πιθανώς, από ένα «καινούργιο πακέτο» που πρωτοεμφανίζεται εκείνη τη χρονική στιγμή με πιθανότητα α. Για κάθε πακέτο που έχει στη μνήμη ο χρήστης m, στρίβει ένα νόμισμα με μια (μικρή) πιθανότητα επιτυχίας p. Τα πακέτα για τα οποία το νόμισμα δείξει επιτυχία, ο χρήστης m θα θελήσει να τα μεταδώσει στο δίκτυο. Την ίδια διαδικασία ακολουθούν όλοι οι χρήστες, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Αν υπάρξουν παραπάνω από ένα πακέτα που θελήσουν να μεταδοθούν στο δίκτυο, τότε γίνεται «σύγκρουση» (collision) και η μετάδοση είναι ανεπιτυχής. Μέ άλλα λόγια, σε κάθε χρονική στιγμή, γίνεται επιτυχής μετάδοση ενός το πολύ πακέτου αν, ανάμεσα σε όλα τα πακέτα (παλιά ή καινούργια) όλων των χρηστών, μόνο ένα διαλέχτηκε προς μετάδοση.

Αν συμβολίσουμε με X_n το πλήθος των παλιών πακέτων που υπάρχουν συνολικά στις μνήμες των υπολογιστών των χρηστών, τη χρονική στιγμή n, τότε η (X_n) είναι διαδικασία Markov με τιμές στο σύνολο $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10. *(α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης* $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. [7]
(β) Τι μπορείτε να πείτε για την ευστάθεια του συστήματος;[8]
(γ) Τέλος, αν υποθέσουμε ότι η p δεν είναι η ίδια για κάθε χρήστη, αλλά ότι ο χρήστης m χρησιμοποιεί τη δική του πιθανότητα p_m, να αιτιολογείστε ότι η (X_n) δεν είναι Markov. Επίσης να αιτιολογείστε ότι αν θέσουμε Y_n^m να είναι ο αριθμός των παλιών πακέτων που έχει στη μνήμη του ο χρήστης m τη χρονική στιγμή n, τότε το διάνυσμα $Y_n = (Y_n^1, \ldots, Y_n^N)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι διαδικασία Markov με τιμές στο S^N.

[7] Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $p_{i,j} = 0$ εκτός αν $j \in \{i-1, i, \ldots, i+N\}$. Επίσης παρατηρείστε ότι, δεδομένου ότι $X_n = i$, η πιθανότητα του $X_{n+1} = i-1$ είναι η πιθανότητα να μην έχει δημιουργηθεί κανένα καινούργιο πακέτο $[= (1-\alpha)^N]$ επί την πιθανότητα να έχει διαλεχτεί ένα ακριβώς παλιό πακέτο από κάποιον χρήστη $[= ip(1-p)^{i-1}]$.

[8] Αρκεί να δείξετε ότι, για $N = 1$, το σύστημα δεν έχει στάσιμη κατανομή.