Μια Σύντομη Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Μωυσής Α. Μπουντουρίδης*

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών
265 00 Ρίο-Πάτρα

Draft – **ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ** – 5 Ιανουαρίου 2005

Περιεχόμενα

*mboudour@upatras.gr

1. Αλυσίδες Markov

1.1. Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορισμός 1.1. Μια *στοχαστική διαδικασία* στο σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι μια μονο-παραμετρική οικογένεια $\{X(t)\colon t \in T\}$ τυχαίων μεταβλητών, που είναι όλες ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Με άλλα λόγια, για κάθε τιμή της παραμέτρου $t \in T$, $X(t)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(t)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, για κάθε σύνολο Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap S$.

Η παράμετρος t, ένας πραγματικός αριθμός, που παίρνει τιμές στο σύνολο $T \subset \mathbb{R}$, συνήθως δεχόμαστε ότι παριστάνει το *χρόνο*.

Το σύνολο $S = \cup_{t \in T} X(t)(\Omega) = \{X(t)(\omega) : \omega \in \Omega, t \in T\}$, στο οποίο παίρνουν τιμές οι τυχαίες μεταβλητές της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\colon t \in T\}$, ονομάζεται *χώρος καταστάσεων* και τα στοιχεία του S ονομάζονται *καταστάσεις* της στοχαστικής διαδικασίας αυτής. Επιπλέον, όταν $X(t) = s$, για κάποια $s \in S$ και $t \in T$, λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία *βρίσκεται στην κατάσταση* s στο χρόνο t.

Αυτός είναι ο γενικός ορισμός μιας στοχαστικής διαδικασίας με χρόνους και καταστάσεις στο $\mathbb{R}$. Βεβαίως, θα μπορούσαμε να ορίσουμε στοχαστικές διαδικασίες σε γενικότερα πλαίσια (π.χ., σε μιγαδικό χρόνο ή με καταστάσεις στο $\mathbb{R}^n$ ή και σε πιο γενικούς χώρους) αλλά τότε θα ξεφεύγαμε από τον εισαγωγικό χαρακτήρα του παρόντος κειμένου.

Πάντως, οι ειδικότεροι τύποι στοχαστικών διαδικασιών εξαρτώνται από το τι είδους είναι τα σύνολα T και S (σαν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ εδώ). Πιο συγκεκριμένα, οι διαφοροποιήσεις στην τυπολογία των στοχαστικών διαδικασιών συνδέονται με το αν τα T και S είναι αριθμήσιμα σύνολα (η *διακριτή περίπτωση*) ή μη αριθμήσιμα σύνολα (η *συνεχής περίπτωση*, με την έννοια ότι τα σύνολα αυτά έχουν τον *πληθάριθμο του συνεχούς*).

Σε ό,τι αφορά το σύνολο T των χρόνων, όταν είμαστε στη διακριτή περίπτωση, δηλαδή, όταν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο, όπως όταν $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (ή όταν $T = \mathbb{Z}$), τότε συνήθως γράφουμε (σαν δείκτη) n αντί για t (σε παρενθέσεις) και λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n \geq 0}$ (ή $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$) αποτελεί μια *στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου*.

Όταν είμαστε στη συνεχή περίπτωση για το T, δηλαδή, όταν το T είναι ένα μη αριθμήσιμο απειροσύνολο, όπως όταν $T = [0, \infty)$, η ημι-ευθεία των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών (ή όταν $T = \mathbb{R}$), τότε λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ (ή $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$) αποτελεί μια *στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου*.

Αναφορικά τώρα με το σύνολο S των καταστάσεων, γενικώς πάλι, μπορεί αυτό να είναι είτε ένα αριθμήσιμο σύνολο (είτε πεπερασμένο σύνολο ή αριθμήσιμο απειροσύνολο) ή ένα μη αριθμήσιμο απειροσύνολο. Παραδείγματα της πρώτης περίπτωσης είναι τα σύνολα καταστάσεων $S = \mathbb{Z}$ ή $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ή $S = \{0, 1, \ldots s\}$, για κάποιο θετικό ακέραιο s, και της δεύτερης περίπτωσης το σύνολο καταστάσεων $S = \mathbb{R}$.

Στο κεφάλαιο αυτό αλλά και σε όσα ακολουθούν, πλην του τελευταίου κεφαλαίου, θα ασχοληθούμε με στοχαστικές διαδικασίες στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων είναι αριθμήσιμος. Θα επιστρέψουμε στη μη αριθμήσιμη περίπτωση του χώρου καταστάσεων, όταν θα εξετάσουμε τις διαδικασίες διάχυσης στο τελευταίο κεφάλαιο.

Όταν όμως, πέραν του αριθμήσιμου χώρου καταστάσεων, υποθέσουμε ότι ισχύει μια ακόμη σημαντική ιδιότητα, που ονομάζεται *ιδιότητα Markov* (και χοντρικά επιβάλλει τη στοχαστική διαδικασία να *στερείται μνήμης*, με μια έννοια που θα διευκρινισθεί καλύτερα στους ορισμούς που ακολουθούν), τότε έχουμε μια από τις σημαντικότερες ειδικές περιπτώσεις των στοχαστικών διαδικασιών, τις *στοχαστικές διαδικασίες Markov* (ή *Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες*), οι οποίες ορίζονται με περισσότερες λεπτομέρειες ως εξής:

Ορισμός 1.2. Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n\geq 0}$ λέγεται ότι είναι μια *αλυσίδα Markov*, αν αφενός όλες οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}_{n\geq 0}$ παίρνουν τιμές στο ίδιο αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων S και αφετέρου ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov, για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ και για κάθε $s_i, s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{n-1}}, s_j \in S$:

$$P(X_{n+1} = s_j \,|\, X_n = s_i, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \ldots, X_1 = s_{i_1}, X_0 = s_{i_0}) = P(X_{n+1} = s_j \,|\, X_n = s_i).$$

Ορισμός 1.3. Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ λέγεται ότι είναι μια *αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου*, αν αφενός όλες οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}_{n\geq 0}$ παίρνουν τιμές στο ίδιο αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων S και αφετέρου ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov, για κάθε ακολουθία χρόνων $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ και για κάθε $s_i, s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{n-1}}, s_j \in S$:

$$P(X_{t_n} = s_j \,|\, X_{t_{n-1}} = s_i, X_{t_{n-2}} = s_{i_{n-1}}, \ldots, X_{t_0} = s_{i_0}) = P(X_{t_n} = s_j \,|\, X_{t_{n-1}} = s_i).$$

1.2. Μεταβάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τις Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου, δηλαδή, τις αλυσίδες Markov, σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων. Επιπλέον, για κάθε αλυσίδα Markov, θα συμβολίζουμε το χώρο καταστάσεών της με $S = \{1, 2, \ldots\}$, εννοώντας ότι $S = \{1, 2, \ldots, |S|\}$, όπου $|S| < \infty$, όταν το S είναι πεπερασμένο, και $|S| = \infty$, όταν το S είναι (αριθμήσιμα) άπειρο σύνολο.

Ορισμός 1.4. Μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ ονομάζεται *ομοιογενής*, αν, για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $i, j \in S$,

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = P(X_1 = j \,|\, X_0 = i).$$

Στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε σε μια αλυσίδα Markov, θα εννοούμε πάντα ότι πρόκειται για μια ομοιογενή αλυσίδα.

Ορισμός 1.5. Έστω η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$. Τότε ο πίνακας P με στοιχεία

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } n \geq 0,$$

ονομάζεται *πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων* και τα στοιχεία του ονομάζονται *πιθανότητες μεταβάσεων* μεταξύ των καταστάσεων της αλυσίδας. Προφανώς, όταν ο χώρος καταστάσεων S είναι πεπερασμένος, ας πούμε $|S| = k$, τότε ο πίνακας P είναι τάξης $k \times k$, ενώ διαφορετικά, για S αριθμήσιμα άπειρο, η τάξη του πίνακα P είναι άπειρη.

Πρόταση 1.1. *Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων P είναι ένας στοχαστικός πίνακας, με την έννοια ότι:*

- *τα στοιχεία του P είναι μη αρνητικά, δηλαδή, $P_{ij} \geq 0$, για κάθε $i, j \in S$.*
- *τα αθροίσματα των γραμμών του P είναι ίσα με 1, δηλαδή, $\sum_{j\in S} P_{ij} = 1$, για κάθε $i \in S$.*

Ορισμός 1.6. Για κάθε δυο ακέραιους $m, n \geq 0$, ο πίνακας $P(m, m+n)$ με στοιχεία

$$P_{ij}(m, m+n) = P(X_{m+n} = j \,|\, X_m = i), \text{ για } i, j \in S,$$

ονομάζεται *πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων σε n βήματα* και τα στοιχεία του ονομάζονται *πιθανότητες μεταβάσεων σε n βήματα* μεταξύ των καταστάσεων της αλυσίδας Markov.

Προφανώς, $P(m, m+1) = P$. Επιπλέον όμως, ο $P(m, m+n)$ δεν εξαρτάται από το m, όπως συνεπάγεται το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.1. (**Οι Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov**.) *Για κάθε ακέραιους $m, n, r \geq 0$, ισχύει*

$$P_{ij}(m, m+n+r) = \sum_{l \in S} P_{il}(m, m+n)\, P_{lj}(m+n, m+n+r).$$

Δηλαδή,

$$P(m, m+n+r) = P(m, m+n)\, P(m+n, m+n+r)$$

και, άρα,

$$P(m, m+n) = P^n, \text{ η } n\text{–οστή δύναμη του } P.$$

Με άλλα λόγια, συμβολίζοντας με $P(n)$ τον πίνακα $P(0, n)$,

$$P_{ij}(n) = P_{ij}(0, n), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ για κάθε } n \geq 0,$$

από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov παίρνουμε

$$P(n) = P(0, n) = P(m, m+n) = P^n, \text{ για κάθε } n, m = 0, 1, \ldots$$

Αν, επιπλέον, για κάθε χρόνο $n = 0, 1, \ldots$, συμβολίσουμε με $\mu^{(n)} = (\mu_i^{(n)} \colon i \in S)$ το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X_n (δηλαδή, $\mu_i^{(n)} = P(X_n = i)$, για κάθε $i \in S$ και κάθε $n = 0, 1, \ldots$), τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.2. $\mu^{(m+n)} = \mu^{(m)} P(n)$ *και, άρα,* $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$.

1.3. Τυχαίοι Περίπατοι

Μια ειδική περίπτωση αλυσίδας Markov είναι ο τυχαίος περίπατος, που ορίζεται σύμφωνα με τα παρακάτω.

Ορισμός 1.7. Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n \geq 0}$ λέγεται ότι αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές, που είναι *κατανεμημένες ανεξάρτητα και όμοια* (*κ.α.ο.*), αν η διαδικασία αυτή

(i) αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (που σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές κάθε πεπερασμένης υποσυλλογής της διαδικασίας αυτής είναι ανεξάρτητες) και

(ii) όλες αυτές οι τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής, δηλαδή, $P(X_i \leq x) = P(X_j \leq x)$, για κάθε $i, j = 0, 1, \ldots$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.8. Έστω η τυχαία μεταβλητή Y_0, που παίρνει τιμές στο σύνολο των ακέραιων $\mathbb{Z}$. Επιπλέον, έστω μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n\geq 1}$, που αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{-1,+1\}$ και οι οποίες είναι κατανεμημένες ανεξάρτητα και όμοια με πιθανότητες, για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$

$$P(X_n = +1) = p, \;\; P(X_n = -1) = q,$$

για κάποια $p, q \in (0, 1), p + q = 1$. Τότε η στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n\geq 0}$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση

$$Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}, \text{ δηλαδή, } Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

ονομάζεται (*απλός*) *τυχαίος περίπατος* στο $\mathbb{Z}$ με παράμετρο $p \in (0, 1)$. Όταν $p = \frac{1}{2}$, ο τυχαίος περίπατος ονομάζεται *συμμετρικός*.

Πρόταση 1.3. *Ο τυχαίος περίπατος $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ στο $\mathbb{Z}$ με παράμετρο $p \in (0, 1)$ είναι μια αλυσίδα Markov στο σύνολο καταστάσεων $S = \mathbb{Z}$ με τις εξής πιθανότητες μεταβάσεων*

$$P_{ij} = \begin{cases} p, & \text{όταν } j = i + 1, \\ q = 1 - p, & \text{όταν } j = i - 1, \\ 0, & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Επιπλέον, για κάθε $i, j \in \mathbb{Z}$ και κάθε $n = 0, 1, \ldots,$

$$P_{ij}(n) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}(n+j-1)} p^{\frac{1}{2}(n+j-1)} q^{\frac{1}{2}(n-j+1)}, & \text{για } n + j - 1 \geq 0 \text{ άρτιο,} \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου $P_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$.

Θεώρημα 1.2. *Έστω ο τυχαίος περίπατος $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ στο $\mathbb{Z}$ με παράμετρο $p \in (0, 1)$ και $i \in \mathbb{Z}$. Τότε*

(i) $\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n) = 0$ *και*

(ii) η πιθανότητα ώστε ο τυχαίος περίπατος αυτός να επιστρέψει στο i, από όπου έχει ξεκινήσει, είναι

$$P_{ii}(m) = 1 - |p - q|, \text{ για κάποιο } m \geq 1,$$

όπου $P_{ii}(n) = P(Y_n = i \mid Y_0 = i)$, για κάθε $n \geq 1$.

Άρα, όταν $p = q = \frac{1}{2}$, ο τυχαίος περίπατος πάντα επιστρέφει στην κατάσταση, από την οποίαν έχει ξεκινήσει.

1.4. Ταξινόμηση Καταστάσεων

Επιστρέφουμε τώρα στις αλυσίδες Markov και θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε κάτω από ποιες συνθήκες ισχύει σε γενικότερο πλαίσιο η ιδιότητα του τελευταίου αποτελέσματος των τυχαίων περιπάτων. Έστω λοιπόν μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P.

Ορισμός 1.9. Μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται *επαναφερόμενη* (ή *επαναλαμβανόμενη*) (*recurrent*), αν, οπωσδήποτε, η αλυσίδα επιστρέφει κάποια (μελλοντική) χρονική στιγμή στην κατάσταση αυτή, από την οποίαν έχει ξεκινήσει αρχικά, δηλαδή, αν

$$P_{ii}(n) = P(X_n = i \mid X_0 = i) = 1, \text{ για κάποιο } n \geq 1.$$

Αν όμως το ενδεχόμενο αυτό δεν είναι σίγουρο, δηλαδή, η προηγούμενη πιθανότητα είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας, η κατάσταση i ονομάζεται *παροδική* (*transient*).

Παράδειγμα 1.1. Έστω ο τυχαίος περίπατος $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ στο $\mathbb{Z}$ με παράμετρο $p \in (0,1)$. Τότε μια κατάσταση $i \in \mathbb{Z}$ είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν $p = \frac{1}{2}$, δηλαδή, αν και μόνον αν ο τυχαίος περίπατος είναι συμμετρικός.

Για να μελετήσουμε τους χρόνους επίσκεψης (ή πρόσπτωσης) σε διάφορες καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov, πρέπει πρώτα να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς (συμβολισμούς).

Ορισμός 1.10. Δοθέντων των καταστάσεων $i, j \in S$ και του χρόνου $n \geq 1$, συμβολίζουμε την πιθανότητα ώστε, όταν η αλυσίδα αρχίσει στην κατάσταση i, να επισκεφθεί στο χρόνο n *για πρώτη φορά* την κατάσταση j, με

$$f_{ij}(n) = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i),$$

και την πιθανότητα ώστε, όταν η αλυσίδα αρχίσει στην κατάσταση i, να επισκεφθεί κάποτε την κατάσταση j (για πρώτη φορά), με

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n).$$

Προφανώς, η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν $f_{ii} = 1$ και παροδική αν και μόνον αν $f_{ii} < 1$.

Όμως, για να δώσουμε κάποια πιο λεπτομερή κριτήρια επαναφοράς με βάση τις πιθανότητες μεταβάσεων στο χρόνο n, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις εξής *γεννήτριες συναρτήσεις*:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_{ij}(n), \quad F_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f_{ij}(n),$$

όπου $P_{ij}(n) = P(X_n = j \,|\, X_0 = i)$ και δεχόμαστε ότι $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$, το δέλτα του Kronecker, και $f_{ij}(0) = 0$, για κάθε $i, j \in S$. Όπως συνήθως, υποθέτουμε ότι $|s| < 1$, για να εξασφαλισθεί η σύγκλιση (σε απόλυτη τιμή) των παραπάνω σειρών. Τέλος, παρατηρούμε ότι $f_{ij} = F_{ij}(1)$.

Πρόταση 1.4. *Για κάθε $i \in S$,*

(i) $P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s)P_{ii}(s)$,

(ii) $P_{ij}(s) = F_{ij}(s)P_{jj}(s)$, *για κάθε $j \neq i$.*

Πόρισμα 1.1. *Για κάθε $i \in S$,*

(i) η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) = \infty$

(ii) και η κατάσταση i είναι παροδική αν και μόνον αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) < \infty$.

Πόρισμα 1.2. *Αν η κατάσταση i είναι παροδική, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n) < \infty$, για κάθε j. Άρα, αν η i είναι παροδική, τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = 0$, για κάθε j.*

Θεώρημα 1.3. *Για κάθε $i \in S$,*

(i) η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν

$$P(X_n = i, \text{ για άπειρα πολλά } n \,|\, X_0 = i) = 1,$$

(ii) και η κατάσταση j είναι παροδική αν και μόνον αν

$$P(X_n = i, \text{ για άπειρα πολλά } n \,|\, X_0 = i) = 0.$$

Ορισμός 1.11. Για κάθε $i, j \in S$, ο *χρόνος επίσκεψης* (*ή πρόσπτωσης*) στην κατάσταση j, όταν η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση i, ορίζεται ως

$$T_{ij} = \min\{n \geq 1 \colon X_n = j, X_0 = i\},$$

με τη σύμβαση ότι $T_{ij} = \infty$, όταν η αλυσίδα δεν επισκέπτεται ποτέ την κατάσταση j. Επίσης, ορίζεται ο *μέσος χρόνος επίσκεψης* (*ή πρόσπτωσης*) ως

$$\tau_{ij} = E[T_{ij}].$$

Όταν $i = j$, το $\tau_i = \tau_{ii}$ ονομάζεται *μέσος χρόνος επαναφοράς* στην κατάσταση i.

Πόρισμα 1.3. *Για κάθε $i \in S$,*

$$\tau_i = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n), & \text{όταν η } i \text{ είναι επαναφερόμενη,} \\ \infty, & \text{όταν η } i \text{ είναι παροδική.} \end{cases}$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\tau_i = F_{ii}^{'}(1).$$

Ορισμός 1.12. Η επαναφερόμενη κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται *μηδενικά επαναφερόμενη* (*null recurrent*), αν $\tau_i = \infty$, και *μη μηδενικά επαναφερόμενη* (*non-null recurrent*) ή *θετικά επαναφερόμενη*, αν $\tau_i < \infty$.

Παράδειγμα 1.2. Στο συμμετρικό τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{Z}$, κάθε κατάσταση είναι μηδενικά επαναφερόμενη.

Θεώρημα 1.4. *Μια επαναφερόμενη κατάσταση $i \in S$ είναι μηδενικά επαναφερόμενη αν και μόνον αν $\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n) = 0$. Επιπλέον, όταν ισχύει η σχέση αυτή, τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ji}(n) = 0$, για κάθε $j \in S$.*

Πρόταση 1.5. *Όταν ο χώρος καταστάσεων S μιας αλυσίδας Markov είναι πεπερασμένος, τότε τουλάχιστον μια κατάσταση πρέπει να είναι επαναφερόμενη και κάθε επαναφερόμενη κατάσταση πρέπει να είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη.*

Στη συνέχεια, δοθέντος ενός συνόλου A θετικών ακέραιων αριθμών, συμβολίζουμε με $\gcd A$ το *μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη* των αριθμών του A.

Ορισμός 1.13. Η *περίοδος* $\mathrm{d}(i)$ μιας κατάστασης $i \in S$ ορίζεται ως

$$\mathrm{d}(i) = \gcd\{n \geq 1 \colon P_{ii}(n) > 0\}.$$

Η κατάσταση i ονομάζεται *περιοδική*, αν $\mathrm{d}(i) \geq 2$, και *απεριοδική*, αν $\mathrm{d}(i) = 1$.

Επιπλέον, μια αλυσίδα λέγεται *απεριοδική*, αν όλες οι καταστάσεις της είναι απεριοδικές. Διαφορετικά, η αλυσίδα λέγεται *περιοδική*.

Με άλλα λόγια, η περίοδος της κατάστασης i είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης του συνόλου των χρόνων, για τους οποίους η αλυσίδα μπορεί να ξαναεπιστρέψει στην κατάσταση i, από την οποίαν ξεκινά. Διαφορετικά ειπομένο, $P_{ii}(n) = 0$, εκτός αν το n είναι πολλαπλάσιο του $\mathrm{d}(i)$, το οποίο είναι ο μικρότερος ακέραιος, που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα.

Παράδειγμα 1.3. Όλες οι καταστάσεις ενός τυχαίου περίπατου στο $\mathbb{Z}$ είναι περιοδικές με περίοδο 2, παροδικές, εφόσον $p \neq \frac{1}{2}$, και μηδενικά επαναναφερόμενες, εφόσον $p = \frac{1}{2}$.

Ορισμός 1.14. Μια κατάσταση i ονομάζεται *εργοδική*, αν είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη, και απεριοδική. Και η αλυσίδα ονομάζεται *εργοδική*, αν όλες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές.

1.5. Ταξινόμηση Αλυσίδων

Έστω η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στον αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P.

Ορισμός 1.15. Έστω δυο καταστάσεις $i, j \in S$. Τότε λέμε ότι η κατάσταση i *επικοινωνεί* με την κατάσταση j, αν υπάρχει χρόνος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε

$$P_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i) > 0.$$

Όταν η κατάσταση i επικοινωνεί με την κατάσταση j, γράφουμε "$i \to j$". Αν, επιπλέον, και η κατάσταση j επικοινωνεί με την κατάσταση i, γράφουμε "$i \leftrightarrow j$" και λέμε ότι οι καταστάσεις i και j *επικοινωνούν μεταξύ τους*.

Παρατήρηση 1.1. Ο προηγούμενος ορισμός των επικοινωνούντων μεταξύ τους καταστάσεων εισάγει μια *σχέση ισοδυναμίας* "$\leftrightarrow$" στο $S \times S$ (δηλαδή, μια αυτοπαθή, συμμετρική και μεταβατική διαδική σχέση στο $S \times S$). Επομένως, με τον τρόπο αυτό, ορίζεται ένας διαμερισμός του S σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς αυτήν τη σχέση.

Θεώρημα 1.5. *Αν $i \leftrightarrow j$, τότε:*

(i) η κατάσταση i είναι παροδική αν και μόνον αν και η j είναι παροδική,

(ii) η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν και η j είναι επαναφερόμενη,

(iii) η κατάσταση i είναι μηδενικά επαναφερόμενη αν και μόνον αν και η j είναι μηδενικά επαναφερόμενη,

(iv) η κατάσταση i είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη αν και μόνον αν και η j είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη,

(v) η κατάσταση i είναι περιοδική αν και μόνον αν και η j είναι περιοδική, οπότε $\mathrm{d}(i) = \mathrm{d}(j)$,

(vi) η κατάσταση i είναι εργοδική αν και μόνον αν και η j είναι εργοδική.

Ορισμός 1.16. Έστω C ένα σύνολο καταστάσεων μιας αλυσίδας Markov. Τότε το C ονομάζεται:

- *κλειστό*, αν, όταν η αλυσίδα μπει μέσα στο C, ποτέ στη συνέχεια δεν βγαίνει έξω από το σύνολο αυτό, δηλαδή, αν $P_{ij} = 0$, για κάθε $i \in C$ και $j \notin C$,

- *απορροφητικό* (*absorbing*), αν το C είναι κλειστό και περιέχει μόνο μια κατάσταση,

- *αδιαχώριστο* (*irreducible*), αν κάθε δυο καταστάσεις $i, j \in C$ επικοινωνούν μεταξύ τους (δηλαδή, $i \leftrightarrow j$, για κάθε $i, j \in C$).

Ορισμός 1.17. Μια αλυσίδα Markov ονομάζεται *αδιαχώριστη* (ή *μη διαχωρίσιμη* ή *μη αναγώγιμη*) (*irreducible*), αν κάθε δυο καταστάσεις της $i, j \in S$ επικοινωνούν μεταξύ τους (δηλαδή, $i \leftrightarrow j$). Διαφορετικά, η αλυσίδα ονομάζεται *διαχωρίσιμη* (ή *αναγώγιμη*) (*reducible*).

Θεώρημα 1.6. (**Διαμερισμός Χώρου Καταστάσεων.**) *Ο χώρος καταστάσεων S μιας αλυσίδας Markov μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο ως*

$$S = T \cup \bigcup_{j=1}^{N} C_j,$$

όπου τα σύνολα καταστάσεων $T, C_1, \ldots, C_N$ είναι ανά δυο ξένα μεταξύ τους, το T αποτελείται (μόνο) από παροδικές καταστάσεις και κάθε ένα από τα $C_1, \ldots, C_N$ είναι κλειστό και αδιαχώριστο και αποτελείται (μόνο) από επαναφερόμενες καταστάσεις.

Παράδειγμα 1.4. Στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$, θεωρούμε την αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε να ταξινομήσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο επαναφοράς της κατάστασης 1.

Πρώτα, παρατηρούμε ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, που σημαίνει ότι η αλυσίδα αυτή είναι αδιαχώριστη. Ας προσπαθήσουμε τώρα να ταξινομήσουμε την κατάσταση 1. Καθώς έχουμε

$$f_{11}(1) = f_{11}(2) = f_{11}(3) = f_{11}(4) = 1/4, \ f_{11}(n) = 0, \ \text{για } n \geq 5,$$

δηλαδή, $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}(n) = 1$, η κατάσταση 1 είναι επαναφερόμενη. Επίσης, επειδή $\tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}(n) = 1/4 + 1/2 + 3/4 + 1 = 10/4 < \infty$, το 1 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη κατάσταση. Επιπλέον, επειδή $P_{11}(1) > 0$, το 1 είναι και απεριοδική κατάσταση. Επομένως, όλες (και οι τέσσερις) οι καταστάσεις είναι εργοδικές, αφού επικοινωνούν μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1.5. Στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$, θεωρούμε την αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε (i) να ταξινομήσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και (ii) να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων.

(i) Προφανώς, η κατάσταση 2 είναι απορροφητική, απεριοδική (διότι $P_{22}(1) > 0$) και, με τετριμμένο τρόπο, μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη. Το σύνολο $\{1, 3, 4\}$ είναι αδιαχώριστο και κλειστό και, άρα, οι καταστάσεις $1, 3$ και 4 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες. Επιπλέον, επειδή $\mathrm{d}(1) = \mathrm{d}(3) = \gcd\{2, 3, \ldots\} = 1$ και $\mathrm{d}(4) = \gcd\{3, 5, \ldots\} = 1$, οι καταστάσεις $1, 3$ και 4 είναι απεριοδικές και, άρα, εργοδικές.

(ii) Για να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων, πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
f_{11}(1) &= 0,\ f_{11}(2) = 1/2,\ f_{11}(3) = 1/2,\ f_{11}(n) = 0,\ \text{για } n \geq 4,\\
f_{22}(1) &= 1,\ f_{22}(n) = 0,\ \text{για } n \geq 2,\\
f_{33}(1) &= 0,\ f_{33}(2k) = 0,\ \text{για } k \geq 1,\ f_{33}(2k+1) = (1/2)^k,\ \text{για } k \geq 1,\\
f_{44}(1) &= 0,\ f_{44}(2) = 1/2,\ f_{44}(3) = 1/2,\ f_{44}(n) = 0,\ \text{για } n \geq 4.
\end{aligned}$$

Καθώς, για κάθε επαναφερόμενη κατάσταση i, $\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)$, παίρνουμε $\tau_1 = 5/2, \tau_2 = 1, \tau_3 = 5, \tau_4 = 5/2$.

Παράδειγμα 1.6. Στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, θεωρούμε την αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}.$$

Θέλουμε (i) να ταξινομήσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και (ii) να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων.

(i) Τα σύνολα $\{1, 2\}$ και $\{5, 6\}$ είναι αδιαχώριστα και κλειστά. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του διαμερισμού του χώρου καταστάσεων, τα σύνολα αυτά πρέπει να περιέχουν μη μηδενικές (θετικές) επαναφερόμενες καταστάσεις (επειδή ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος). Οι καταστάσεις 3 και 4 είναι παροδικές, διότι αυτές επικοινωνούν με τα κλειστά σύνολα $\{1, 2\}$ και $\{5, 6\}$. Όλες οι καταστάσεις έχουν περίοδο 1, διότι $p_{ii}(1) > 0$, για όλα τα i. Έτσι, οι καταστάσεις 3 και 4 είναι παροδικές, ενώ οι καταστάσεις 1, 2, 5 και 6 είναι εργοδικές.

(ii) Για να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων της αλυσίδας αυτής, πρώτα παρατηρούμε ότι, με έναν απλό υπολογισμό, βρίσκουμε:

$$f_{11}(n) = \begin{cases} p_{11} = \frac{1}{2}, & \text{για } n = 1,\\ p_{12}(p_{22})^{n-2} p_{21} = \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^{n-2}\frac{1}{4}, & \text{για } n \geq 2. \end{cases}$$

Άρα, επειδή η κατάσταση 1 είναι επαναφερόμενη, $\tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}(n) = 19/6$. Παρόμοια, μπορούν να βρεθούν και οι υπόλοιποι μέσοι χρόνοι επαναφοράς.

1.6. Στάσιμες Κατανομές

Έστω πάντα η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στον αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P.

Ορισμός 1.18. Ένα διάνυσμα σειράς $\pi = (\pi_j \colon j \in S)$ λέγεται ότι αποτελεί μια *στάσιμη κατανομή* της αλυσίδας Markov, αν το π ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

(i) $\pi_j \geq 0$, για κάθε $j \in S$, και $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$, και

(ii) $\pi P = \pi$, με την έννοια ότι ισχύει η εξής *εξίσωση ολικού ισοζυγίου*

$$\sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j, \text{ για κάθε } j \in S.$$

Παρατήρηση 1.2. Παρατηρούμε ότι η πρώτη από τις δυο συνθήκες του προηγούμενου ορισμού λέει ότι το π είναι ένα διάνυσμα (μέτρου) πιθανότητας, ενώ η δεύτερη συνεπάγεται για το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X_n ότι, αν $\mu^{(0)} = \pi$, τότε $\mu^{(n)} = \pi P^n = \pi$, για κάθε $n > 0$, δηλαδή, το διάνυσμα π αποτελεί ένα *αναλλοίωτο μέτρο* (πιθανότητας) για την αλυσίδα Markov.

Πρόταση 1.6. *Αν, για κάθε $i, j \in S$,*

(i) υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)$

(ii) και το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο του i, οπότε το συμβολίζουμε ως

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j,$$

τότε είτε το όριο π_j είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της αλυσίδας Markov ή $\pi_j = 0$, για κάθε $j \in S$.

Πόρισμα 1.4. *Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι είτε παροδικές ή μηδενικά επαναφερόμενες, τότε δεν υπάρχει καμιά στάσιμη κατανομή για την αλυσίδα αυτή.*

Πρόταση 1.7. *Αν υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π, τότε όλες οι καταστάσεις i με $\pi(i) > 0$ είναι επαναφερόμενες.*

Θεώρημα 1.7. *Κάθε αδιαχώριστη αλυσίδα Markov έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή αν και μόνον αν όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες. Στην περίπτωση αυτή, η (μοναδική) στάσιμη κατανομή π δίνεται ως:*

$$\pi_i = \tau_i^{-1}, \text{ για κάθε } i \in S,$$

όπου τ_i είναι ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης i.

<u>*Υπολογισμός των λύσεων της εξίσωσης $\pi = \pi P$ της στάσιμης κατανομής*</u>:

Όταν η αλυσίδα Markov είναι αδιαχώριστη και όλες οι καταστάσεις της είναι επαναφερόμενες, μπορούμε να υπολογίσουμε μια ρίζα x της εξίσωσης πινάκων $x = xP$ ως εξής. Κρατώντας σταθερή μια κατάσταση k, έστω $\rho_i(k)$ το μέσο πλήθος επισκέψεων της αλυσίδας στην κατάσταση i μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση k, δηλαδή, $\rho_i(k) = E[N_i \,|\, X_0 = k]$, όπου

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{X_n = i\} \cap \{T_k \geq n\}},$$

και έστω T_k ο χρόνος της πρώτης επιστροφής στην κατάσταση k, όπως πριν. Παρατηρούμε ότι $N_k = 1$, οπότε, $\rho_k(k) = 1$, και επίσης

$$\rho_i(k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, T_k \geq n \,|\, X_0 = k).$$

Επειδή μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στο k, η κατάσταση πρέπει να βρίσκεται κάπου αλλού, $T_k = \sum_{i \in S} N_i$. Οπότε, παίρνοντας τη μέση τιμή, βρίσκουμε

$$\tau_k = \sum_{i \in S} \rho_i(k).$$

Λήμμα 1.1. *Για κάθε επαναφερόμενη κατάσταση k μιας αδιαχώριστης αλυσίδας Markov, το διάνυσμα $\rho(k) = (\rho_i(k) \colon i \in S)$ ικανοποιεί την εξίσωση $\rho(k) = \rho(k)P$ και έχει συνιστώσες $\rho_i(k) < \infty$, για κάθε $i \in S$.*

Όταν η κατάσταση k είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη, $\tau_k < \infty$, παίρνοντας $\pi_i = \rho_i(k)/\tau_k$, βρίσκουμε μια στάσιμη κατανομή της αλυσίδας κι, επομένως, αποδεικνύουμε, έτσι, το μισό μέρος του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.8. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα Markov, της οποίας όλες οι καταστάσεις είναι επαναφερόμενες. Τότε υπάρχει μια θετική ρίζα x της εξίσωσης $x = xP$ (η οποία είναι μοναδική ως προς πολλαπλασιασμό με σταθερά). Επιπλέον, όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες αν και μόνον αν $\sum_{i \in S} x_i < \infty$ και μηδενικά επαναφερόμενες αν και μόνον αν $\sum_{i \in S} x_i = \infty$.*

Θεώρημα 1.9. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα και $s \in S$ μια (οποιαδήποτε) κατάστασή της. Τότε:*

(i) όλες οι κατάστασεις της αλυσίδας είναι παροδικές αν και μόνον αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\{y_j : j \neq s\}$, τέτοιο ώστε $|y_j| \leq 1$, για κάθε $j \neq s$, το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$y_i = \sum_{j : j \neq s} P_{ij} y_j, \text{ για κάθε } i \neq s,$$

(ii) και όλες οι κατάστασεις της αλυσίδας είναι επαναφερόμενες αν και μόνον αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\{y_j : j \neq s\}$, τέτοιο ώστε $\lim_{j \to \infty} y_j = \infty$, για κάθε $j \neq s$,το οποίο ικανοποιεί τις ανισότητες

$$y_i \geq \sum_{j : j \neq s} P_{ij} y_j, \text{ για κάθε } i \neq s.$$

Παράδειγμα 1.7. *Τυχαίος περίπατος στους μη αρνητικούς ακέραιους:* Τώρα $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και οι πιθανότητες μεταβάσεων είναι οι εξής:

$$P_{0,0} = q, P_{i,i+1} = p, \text{ όταν } i \geq 0, P_{i,i-1} = q, \text{ όταν } i \geq 1,$$

για $p, q \in (0, 1), p + q = 1$. Έστω $\rho = p/q$.

(i) Όταν $q < p$, παίρνοντας $s = 0$, βλέπουμε ότι το διάνυσμα $y_j = 1 - \rho^{-j}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του προηγούμενου θεωρήματος και, άρα, όλες οι καταστάσεις αυτού του τυχαίου περίπατου είναι παροδικές.

(ii) Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση πινάκων $\pi = \pi P$, για να βρούμε τη στάσιμη κατανομή $\pi_j = \rho^j(1 - \rho)$, αν και μόνον αν $q > p$. Επομένως, από το αμέσως προηγούμενο θεώρημα, όλες οι καταστάσεις αυτού του τυχαίου περίπατου είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενς αν και μόνον αν $q > p$.

(iii) Όταν $q = p = \frac{1}{2}$, παίρνοντας $s = 0$, βλέπουμε ότι το διάνυσμα $y_j = j$, για κάθε $j \geq 1$, ικανοποιεί τη συνθήκη (ii) του προηγούμενου θεωρήματος και, άρα, όλες οι καταστάσεις αυτού του τυχαίου περίπατου είναι μηδενικά επαναφερόμενες.

Θεώρημα 1.10. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα Markov με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε $P_{ij}(N) > 0$, για κάθε $i, j \in S$, αν και μόνον αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j$, για κάθε $i, j \in S$, και το όριο αυτό είναι τέτοιο ώστε $\pi_j > 0$, για κάθε $j \in S$, και $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$.*

Πόρισμα 1.5. *Κάθε αδιαχώριστη αλυσίδα Markov σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων έχει πάντα μια μοναδική στάσιμη κατανομή.*

Πόρισμα 1.6. *Όλες οι καταστάσεις μιας αδιαχώριστης αλυσίδας Markov σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.*

Πρόταση 1.8. *Αν μια αλυσίδα Markov είναι αδιαχώριστη και έχει στάσιμη κατανομή π_i, τότε*

$$\pi_i = \tau_i^{-1}, \text{ για κάθε } i \in S.$$

Θεώρημα 1.11. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα Markov. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Υπάρχει μια κατάσταση, που είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη.*

(ii) *Υπάρχει μια στάσιμη κατανομή.*

(iii) *Όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.*

Θεώρημα 1.12. *Αν μια αλυσίδα Markov είναι αδιαχώριστη και απεριοδική, τότε, για κάθε $i, j \in S$,*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \tau_j^{-1}$$

και, άρα, η (μοναδική) στάσιμη κατανομή π της αλυσίδας αυτής είναι η $\pi_j = \tau_j^{-1}$, για $j \in S$.

Πόρισμα 1.7. *Κάθε εργοδική και αδιαχώριστη αλυσίδα Markov έχει μοναδική στάσιμη κατανομή $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \tau_j^{-1}$, για κάθε $i, j \in S$.*

Γενικώς όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι:

Θεώρημα 1.13. *Μια αδιαχώριστη και απεριοδική αλυσίδα Markov είναι εργοδική αν και μόνον αν έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή.*

1.7. Ασκήσεις

Άσκηση 1.1. Έστω η αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

(i) Βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $P(n)$, χωρίς να χρησιμοποιήσετε δυνάμεις πινάκων.

(ii) Δείξτε ότι όλες οι καταστάσεις είναι επαναφερόμενες.

(iii) Δείξτε ότι όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.

(iv) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή.

Άσκηση 1.2. Έστω η αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(i) Βρείτε τους πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεων $P(2)$ και $P(3)$.

(ii) Δείξτε ότι η αλυσίδα αυτή είναι απεριοδική.

(iii) Είναι η αλυσίδα αυτή εργοδική;

Άσκηση 1.3. Έστω η αλυσίδα Markov στο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων, που δίνεται από τις σχέσεις $P_{0,j} = a_j$, για $j \geq 0$, $P_{ii} = r$ και $P_{i,i-1} = 1 - r$, για $i \geq 1$. Ταξινομήστε όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και βρείτε τους μέσους χρόνους επαναφοράς τους.

Άσκηση 1.4. Ταξινομήστε τις καταστάσεις της αλυσίδας Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $\begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}$ και υπολογίστε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεών της.

Άσκηση 1.5. Για κάθε μια από τις παρακάτω αλυσίδες Markov με τους αντίστοιχους πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεων, (1) βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας των καταστάσεων, (2) τις περιόδους των περιοδικών καταστάσεων, (3) ταξινομήστε τις καταστάσεις τους και (4) υπολογίστε τους μέσους χρόνους επαναφοράς (απευθείας, μέσω των τύπων, όχι μέσω της στάσιμης κατανομής) - τουλάχιστον για όσες καταστάσεις αυτό είναι εύκολο:

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iv)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\text{(v)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(vi)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(vii)} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(viii)}\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{(ix)}\quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(x)}\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$\text{(xi)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(xii)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(xiii)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(xiv)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

***Άσκηση* 1.6.** Για κάθε μια από τις παρακάτω αλυσίδες Markov με τους αντίστοιχους πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεων, (1) βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας των καταστάσεων, (2) ταξινομήστε τις καταστάσεις τους, (3) υπολογίστε τις στάσιμες κατανομές τους και (4) υπολογίστε τους μέσους χρόνους επαναφοράς (απευθείας, μέσω των τύπων, όχι μέσω της στάσιμης κατανομής) - τουλάχιστον για όσες καταστάσεις αυτό είναι εύκολο:

$$\text{(i)}\quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iv)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad \text{(v)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(vi)}\quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}, \quad \text{(vii)}\quad \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(viii)}\quad \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\text{(ix)}\quad \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

1.8. Λύσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Λύση Άσκησης 1.1:

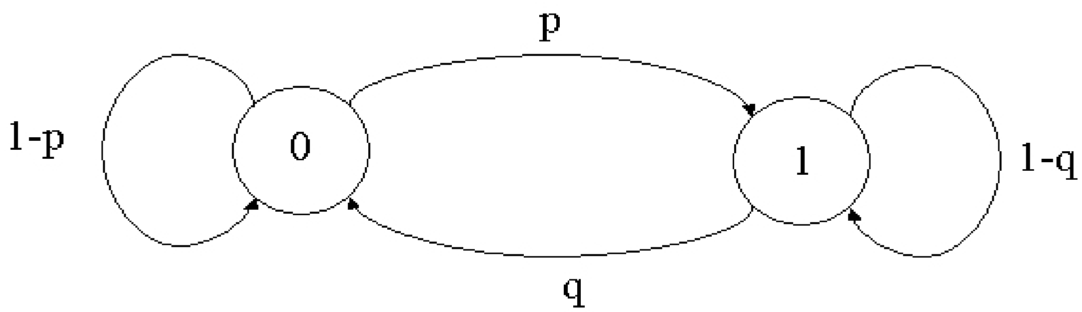
Χώρος καταστάσεων $\{0, 1\}$ και πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων:

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix},$$

δηλαδή:

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = p,$$
$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = q,$$
$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1 - p,$$
$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1 - q.$$

Διάγραμμα του αντίστοιχου μη κατευθυνόμενου γράφου:



<u>**Υπολογισμός της** $P(X_n = 0)$ **(και της** $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0)$**)**</u>
<u>δοθείσης της $P(X_0 = 0) = \pi_0(0)$:</u>

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_{n+1} = 0 \text{ και } X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0 \text{ και } X_n = 1) = \\ &= P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) + P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \\ &= (1-p)P(X_n = 0) + qP(X_n = 1) = \\ &= (1-p)P(X_n = 0) + q(1 - P(X_n = 0)) = \\ &= (1-p-q)P(X_n = 0) + q. \end{aligned}$$

Για $n = 0$,

$$P(X_1 = 0) = (1-p-q)\pi_0(0) + q,$$

για $n = 1$,

$$P(X_2 = 0) = (1-p-q)^2\pi_0(0) + q[1 + (1-p-q)],$$

κ.ο.κ., οπότε παίρνουμε με επαγωγή:

$$P(X_n = 0) = (1-p-q)^n \pi_0(0) + q\sum_{k=0}^{n-1}(1-p-q)^k.$$

<u>Περίπτωση $0 < p, q < 1$</u>: Επειδή τότε $|1-p-q| < 1$, έχουμε μια γεωμετρική σειρά $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-p-q)^k = \frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n[\pi_0(0) - \frac{q}{p+q}] \\ P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n[\pi_0(1) - \frac{p}{p+q}] \end{cases}$$

Υπολογισμός της P^n

Γενικώς:

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_i P(X_0 = i \; \kappa\alpha\iota X_n = j) = \\ &= \sum_i P(X_0 = i) P(X_n = j | X_0 = i) = \\ &= \sum_i \pi_0(i) P_{ij}^n \end{aligned}$$

όπου $\pi_0(i) = P(X_0 = i)$, δηλαδή:

$$P(X_n = j) = \sum_i \pi_0(i) P_{ij}^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(X_n = 0) = \pi_0(0) P_{00}^n + \pi_0(1) P_{10}^n \\ P(X_n = 1) = \pi_0(0) P_{01}^n + \pi_0(1) P_{11}^n \end{cases}$$

Για $\pi_0(0) = 1$ και $\pi_0(1) = 0 \Rightarrow$

$$P_{00}^n = P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned} P_{01}^n &= \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q} \\ P_{10}^n &= \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q} \\ P_{11}^n &= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$P^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}$$

Επαναφορά καταστάσεων

Θα δείξουμε ότι η κατάσταση 0 είναι επαναφερόμενη (παρόμοια και για την κατάσταση 1). Αφού $P_{00}(n) = P_{00}^n = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} P_{00}(n) = \frac{q}{p+q} > 0$ (εφόσον $p, q > 0$) και, άρα, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(n) = \infty$, κάτι που συνεπάγεται ότι η κατάσταση 0 είναι επαναφερόμενη.

Μη μηδενική (θετική) επαναφορά καταστάσεων και μέσος χρόνος επαναφοράς

Πάλι θα δείξουμε ότι η κατάσταση 0 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη. Εξ ορισμού, $f_{00}(1) = 1 - p$ και $f_{00}(n) = P_{01} P_{11}^{n-2} P_{10} = pq(1-q)^{n-2}$, για κάθε $n \geq 2$. Επειδή $|1-q| < 1$, παίρνουμε ότι ο μέσος χρόνος επαναφοράς του 0 είναι $\tau_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}(n) = 1 - p + \sum_{n=1}^{\infty} pq(1-q)^{n-2} = \frac{p+q}{q} < \infty$. Λόγω συμμετρίας, $\tau_1 = \frac{p+q}{p}$. Άρα, και οι δυο καταστάσεις 0 και 1 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.

Υπολογισμός της στάσιμης κατανομής $\pi = (\pi_0, \pi_1)$

Περίπτωση $0 < p, q < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \lim_{n\to\infty} P_{i0}^n = \frac{q}{p+q} \\ \pi_1 = \lim_{n\to\infty} P_{i1}^n = \frac{p}{p+q} \end{cases}$$

και η $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ είναι η *μοναδική* στάσιμη κατανομή.

Διαφορετικά: Από την $\pi = \pi P$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + q\pi_1 \\ \pi_1 &= p\pi_0 + (1-q)\pi_1 \end{aligned}$$

Και $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$$p\pi_0 = q - q\pi_0 \Rightarrow (p+q)\pi_0 = q \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{q}{p+q} \\ \pi_1 = \frac{p}{p+q} \end{cases}$$

Λύση Άσκησης 1.2:

Πρώτα, ας βρούμε τον πίνακα $P(2) = P^2$ αλγεβρικά, δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα P με τον εαυτό του:

$$P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Διαφορετικά, ο $P(2)$ μπορεί να βρεθεί εξετάζοντας τις πιθανότητες μεταβάσεων των καταστάσεων σε 2 βήματα. Έτσι, βλέπουμε ότι ο μόνος τρόπος για τη μετάβαση από το 1 στο 1 σε 2 βήματα είναι να γίνει πρώτα η μετάβαση από το 1 στο 2 (με πιθανότητα 1) και στη συνέχεια η μετάβαση από το 2 στο 1 (με πιθανότητα 1/2). Επομένως, $P_{11}(2) = 1/2$. Επίσης, επειδή για τη μετάβαση από το 1 στο 2 σε 2 βήματα πρέπει πρώτα να γίνει η μετάβαση από το 1 στο 2 (με πιθανότητα 1) και μετά να παραμείνουμε στο 2 (με πιθανότητα 1/2), παίρνουμε $P_{12}(2) = 1/2$. Παρόμοια, βρίσκουμε τα άλλα δυο στοιχεία του πίνακα (ή χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο πίνακας αυτός είναι ένας στοχαστικός πίνακας, οπότε το άθροισμα των γραμμών του πρέπει να είναι ίσο προς 1).

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε

$$P(3) = P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

Έτσι, έχουμε $P_{11}(1) = 0, P_{11}(2) = 1/2$ και $P_{11}(3) = 1/4$. Συνεπώς, $\mathrm{d}(1) = 1$ (μολονότι $P_{11}(1) = 0$). Αλλά, αφού $P_{22}(1) = 1/2 > 0$, έπεται ότι και $\mathrm{d}(2) = 1$. Επομένως, η αλυσίδα είναι απεριοδική.

Επειδή (σύμφωνα με την Άσκηση 1.1) όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας αυτής είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες, η αλυσίδα αυτή είναι εργοδική.

Λύση Άσκησης 1.3:

Όταν $r = 1$, η κατάσταση i είναι απορροφητική, για κάθε $i \geq 1$, και η 0 είναι παροδική, εκτός αν $a_0 = 1$.

Ας υποθέσουμε ότι $r < 1$ και έστω $J = \sup\{j : a_j \geq 0\}$. Τότε, οι καταστάσεις $0, 1, \ldots, J$ σχηματίζουν μια αδιαχώριστη επαναφερόμενη κλάση και είναι όλες απεριοδικές, αν $r > 0$, ενώ όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι παροδικές. Για $0 \leq i \leq J$, ο χρόνος επαναφοράς της i, που δίνεται ως $T_i = \min\{n \geq 1 \colon X_n = i\}$, είναι τέτοιος ώστε $P(T_i = 1) = r$. Όταν $T_i > 1$, το T_i μπορεί να εκφρασθεί ως το άθροισμα των εξής όρων:

$$\begin{aligned} T_i^{(1)} &= \text{ο χρόνος για να φθάσει η αλυσίδα στο 0, όταν το πρώτο βήμα γίνεται προς τα αριστερά,} \\ T_i^{(2)} &= \text{ο χρόνος των μεταβάσεων, που ξεκινούν από το 0, αλλά δεν φθάνουν στο } i, \\ T_i^{(3)} &= \text{ο χρόνος των μεταβάσεων, που τελικά φθάνουν στο } i. \end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $E[T_i^{(1)}] = 1 + (i-1)/(1-r)$, όταν $i \geq 1$, διότι η μέση τιμή του χρόνου αναμονής σε κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι $(1-r)^{-1}$. Το πλήθος N τέτοιων 'μικρών' επισκέψεων κατανέμεται με πιθανότητα $P(N = n) = \alpha_i(1-\alpha_i)^n, n \geq 0$, όπου $\alpha_i = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j$. Επομένως, $E[N] = (1-\alpha_i)/\alpha_i$. Κάθε τέτοια 'μικρή' επίσκεψη έχει μέση διάρκεια:

$$\sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{j}{1-r} + 1 \right) \frac{\alpha_j}{1-\alpha_i} = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{j\alpha_j}{(1-\alpha_i)(1-r)}$$

και, επομένως,

$$E[T_i^{(2)}] = \frac{1}{\alpha_i} \left\{ (1-\alpha_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{j\alpha_j}{1-r} \right\}.$$

Παρόμοια, παίρνουμε:

$$E[T_i^{(3)}] = \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{j-i}{1-r} \right) \alpha_j.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βρίσκουμε:

$$E[T_i] = r + (1-r)E[T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + T_i^{(3)}] = \frac{1}{\alpha_i} \left(1 - r + \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j \right), \ i \geq 1,$$

και, με έναν παρόμοιο τρόπο, $E[T_0] = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j/(1-r)$. Προφανώς, $E[T_i] < \infty$, για $i \leq J$, εφόσον $\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j < \infty$, κάτι που σίγουρα ισχύει, αν $J < \infty$.

Λύση Άσκησης 1.4:

Όλες οι καταστάσεις είναι απορροφητικές, όταν $p = 0$. Για αυτό, ας υποθέσουμε ότι $p \neq 0$. Προφανώς, και οι τρεις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής είναι εργοδικές (γιατί η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων).

Για να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων, προχωράμε ως εξής. Διαγωνικοποιώντας τον πίνακα P, παίρνουμε $P = BQB^{-1}$, όπου

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&1\end{bmatrix},\ B^{-1}=\begin{bmatrix}1/4&1/2&1/4\\1/2&0&-1/2\\1/4&-1/2&1/4\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1-2p&0\\0&0&1-4p\end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$P^n=BQ^nB^{-1}=B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(1-2p)^n&0\\0&0&(1-4p)^n\end{bmatrix}B^{-1},$$

από όπου οι πιθανότητες μεταβάσεων $P_{ij}(n)$ μπορούν εύκολα να βρεθούν:

$$P_{11}(n)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-2p)^n+\frac{1}{4}(1-4p)^n,\ P_{22}(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-4p)^n,$$

και $P_{33}(n)=P_{11}(n)$, λόγω συμμετρίας.

Έτσι, από τον ορισμό του $P_{ij}(s)$ $(=\sum_{n=0}^{\infty}s^nP_{ij}(n))$, βρίσκουμε

$$P_{11}(s)=P_{33}(s)=\frac{1}{4(1-s)}+\frac{1}{2\{1-s(1-2p)\}}+\frac{1}{4\{1-s(1-4p)\}},\quad P_{22}(s)=\frac{1}{2(1-s)}+\frac{1}{2\{1-s(1-4p)\}}.$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση $F_{ii}(s)=1-P_{ii}(s)^{-1}$, μετά από κάποιους απλούς υπολογισμούς, μπορούμε να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς $\tau_i=F_{ii}^{'}(1):\tau_1=\tau_3=4,\tau_2=2$.

Λύση Άσκησης 1.5:

(i) Κάθε κατάσταση της αλυσίδας είναι περιοδική περιόδου 2 (όταν $p\neq 0$) και όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.

(v) Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{2,3\},\{1\},\{4\}$. Οι $1,2,3$ είναι παροδικές και η 4 είναι εργοδική. Στάσιμη κατανομή: $\pi_1=\pi_2=\pi_3=0,\pi_4=1$. Ακόμη: $f_{44}(1)=1,f_{44}(n)=0,n\geq 2$.

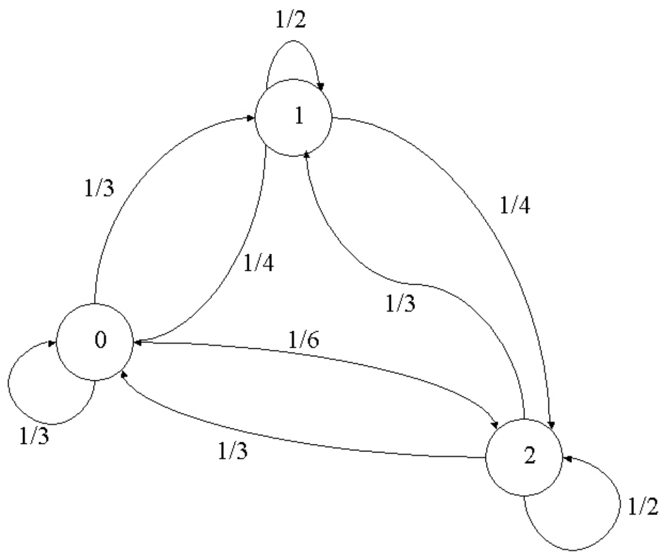
(vi) Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{1,2\},\{3\},\{4\}$. Οι $1,2$ είναι παροδικές και οι $3,4$ είναι εργοδικές. Στάσιμη κατανομή: $\pi_1=\pi_2=0,\pi_3=1-k,\pi_4=k,0\leq k\leq 1$. Ακόμη: $f_{33}(1)=1,f_{33}(n)=0,n\geq 2,f_{44}(1)=1,f_{44}(n)=0,n\geq 2$.

(ix) Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{1,2,4\},\{3,5\}$. Οι $3,5$ είναι παροδικές και οι $1,2,4$ είναι εργοδικές. Στάσιμη κατανομή: $\pi_1=2/5,\pi_2=1/5,\pi_4=2/5,\pi_3=\pi_5=0$.

Λύση Άσκησης 1.6:

(i) Χώρος καταστάσεων $\{0,1,2\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων:

$$P=\begin{bmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/4&1/2&1/4\\1/6&1/3&1/2\end{bmatrix}$$



Υπολογισμός στάσιμης κατανομής $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)^T, \pi = \pi P$:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} \\ \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 = \pi_0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \quad (3)$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (2) - 2(1) &\Rightarrow \pi_1 = \tfrac{5}{3}\pi_0 \\ (1) &\Rightarrow \pi_2 = \tfrac{3}{2}\pi_0 \\ (4) &\Rightarrow \pi_0(1 + \tfrac{5}{3} + \tfrac{3}{2}) = 1 \Rightarrow \pi_0 = \tfrac{6}{25} \\ &\qquad \pi_1 = \tfrac{5}{3}\tfrac{6}{25} = \tfrac{2}{5} \\ &\qquad \pi_2 = \tfrac{3}{2}\tfrac{6}{25} = \tfrac{9}{25}. \end{aligned}$$

(iv) Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{1, 2, 3\}$. Οι $1, 2, 3$ είναι εργοδικές. Στάσιμη κατανομή: $\pi_1 = 2/7, \pi_2 = 1/14, \pi_3 = 9/14$. Ακόμη: $f_{11}(1) = 0, f_{11}(2) = \frac{1}{2}, f_{11}(2k) = \frac{3}{4}(\frac{2}{3})^{2(k-1)}\frac{1}{3}, k \geq 2, f_{11}(2k+1) = \frac{3}{4}(\frac{2}{3})^{2k-1}\frac{1}{3}, k \geq 1, f_{22}(1) = 0, f_{22}(2) = \frac{1}{4}, f_{22}(3) = 0, f_{22}(n) = \frac{1}{16}(\frac{2}{3})^{n-4}, n \geq 4, f_{33}(1) = \frac{2}{3}, f_{33}(2) = \frac{1}{4}, f_{33}(2k+1) = 0, k \geq 1, f_{33}(2k) = \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{k-1}\frac{3}{4}, k \geq 2$.

2. Αλυσίδες Markov Συνεχούς Χρόνου

2.1. Ημι-Ομάδες Μεταβάσεων και Γεννήτορες

Αρχίζουμε υπενθυμίζοντας τον ορισμό της αλυσίδας Markov συνεχούς χρόνου στον αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$, όπου εννοούμε ότι $S = \{1, 2, \ldots, |S|\}$ και $|S| < \infty$, όταν το S είναι πεπερασμένο, και $|S| = \infty$, όταν το S είναι αριθμήσιμο απειροσύνολο.

Ορισμός 2.19. Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ στον αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S λέγεται ότι είναι μια *αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου*, αν, για κάθε ακολουθία χρόνων $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ και για κάθε $i, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, j \in S$, ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov:

$$P(X_{t_n} = j \,|\, X_{t_{n-1}} = i, X_{t_{n-2}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_n} = j \,|\, X_{t_{n-1}} = i).$$

Στη συνέχεια, θα παραλείπουμε να αναφέρουμε το χαρακτηρισμό "συνεχούς χρόνου" από τις αλυσίδες Markov, γιατί μόνο τέτοιες αλυσίδες θα μας απασχολήσουν από εδώ και πέρα. Επιπλέον, πάντα θα θεωρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας είναι το αριθμήσιμο σύνολο $S = \{1, 2, \ldots\}$.

Ορισμός 2.20. Δοθείσης της αλυσίδας Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, ο πίνακας $P(s,t)$ με στοιχεία

$$P_{ij}(s,t) = P(X(t) = j \,|\, X(s) = i), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } 0 \leq s \leq t,$$

ονομάζεται *πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων* και τα στοιχεία του ονομάζονται *πιθανότητες μεταβάσεων* μεταξύ των καταστάσεων της αλυσίδας. Προφανώς, όταν ο χώρος καταστάσεων S είναι πεπερασμένος, ας πούμε $|S| = k$, τότε ο πίνακας P είναι τάξης $k \times k$, ενώ διαφορετικά, για S αριθμήσιμα άπειρο, η τάξη του πίνακα P είναι άπειρη.

Η αλυσίδα Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ονομάζεται *ομοιογενής*, αν, για κάθε $i, j \in S$ και κάθε $0 \leq s \leq t$,

$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0, t-s).$$

Γράφουμε:

$$P_{ij}(t-s) = P_{ij}(s,t)$$

δηλαδή, γράφουμε για τον πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P(t) = P(0,t), \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε σε μια αλυσίδα Markov, θα εννοούμε πάντα ότι πρόκειται για μια ομοιογενή αλυσίδα.

Θεώρημα 2.14. *Η μονοπαραμετρική οικογένεια πινάκων πιθανοτήτων μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i, j \in S, t \geq 0\}$ αποτελεί μια ημι-ομάδα στοχαστικών πινάκων με την έννοια ότι:*

(i) $P(0) = I$, *ο ταυτοτικός πίνακας,*

(ii) *για κάθε $t \geq 0$, πίνακας $P(t)$ είναι στοχαστικός, δηλαδή, τα στοιχεία του είναι μη αρνητικά και τα αθροίσματα των σειρών του είναι 1, και*

(iii) *ισχύουν οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:*

$$P(s+t) = P(s)P(t), \text{ για κάθε } s, t \geq 0.$$

Έτσι, η οικογένεια $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i, j \in S, t \geq 0\}$ ονομάζεται ημι-ομάδα μεταβάσεων.

Ορισμός 2.21. Λέμε ότι η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ είναι *συνεχής στην αρχή*, αν

$$\lim_{h \downarrow 0} P(h) = P(0) = I,$$

όπου η σύγκλιση αυτή ισχύει για κάθε στοιχείο των πινάκων των πιθανοτήτων μεταβάσεων, δηλαδή,

$$\lim_{h \downarrow 0} P_{ij}(h) = 0, \text{ για κάθε } i,j \in S, i \neq j,$$

$$\lim_{h \downarrow 0} P_{ii}(h) = 1, \text{ για κάθε } i \in S.$$

Πρόταση 2.9. *Αν η ημι-ομάδα μεταβάσεων* $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ *είναι συνεχής στην αρχή, τότε η ημι-ομάδα είναι συνεχής σε κάθε χρόνο* $t \geq 0$, *δηλαδή,*

$$\lim_{h \to 0} P(t+h) = P(t), \text{ για κάθε } t \geq 0,$$

όπου πάλι η σύγκλιση στο παραπάνω όριο ισχύει για κάθε στοιχείο των πινάκων των πιθανοτήτων μεταβάσεων.

Ορισμός 2.22. Δοθείσης της ημι-ομάδας μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$, έστω ο πίνακας (γενικώς $|S| \times |S|$) $G = \{G_{ij} : i,j \in S\}$, που ορίζεται ως εξής:

(i) $G_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_{ij}(h)}{h}$, για κάθε $i,j \in S, i \neq j$,

(ii) $G_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_{ii}(h)-1}{h}$, για κάθε $i \in S$,

δηλαδή,

$$G = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P(t) - I}{t}.$$

Τότε ο πίνακας G ονομάζεται (*απειροστός*) *γεννήτορας* της ημι-ομάδας $P(t)$.

Θεώρημα 2.15. *Αν η ημι-ομάδα μεταβάσεων* $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ *είναι συνεχής στην αρχή (οπότε και για κάθε χρόνο), τότε υπάρχει ο γεννήτοράς της* $G = \{G_{ij} : i,j \in S\}$ *και είναι τέτοιος ώστε, για κάθε* $i,j \in S, i \neq j$,

- $0 \leq G_{ij} < \infty$,
- $0 \geq G_{ii} \geq -\infty$, *εκτός αν* S *πεπερασμένο, οπότε* $0 \geq G_{ii} > -\infty$.

Ορισμός 2.23. Έστω μια αλυσίδα Markov, της οποίας η ημι-ομάδα μεταβάσεων έχει γεννήτορα G. Η αλυσίδα αυτή λέγεται *συντηρητική* (*conservative*), αν $\sum_{j \in S} G_{ij} = 0$, δηλαδή, αν

$$G1 = 0,$$

όπου με 1 συμβολίζουμε το διάνυσμα, του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι 1.

Παρατήρηση 2.3. Γενικώς, έχουμε $\sum_{j \in S} G_{ij} \leq 0$, εκτός αν S πεπερασμένο, οπότε η αλυσίδα είναι συντηρητική (δηλαδή, $\sum_{j \in S} G_{ij} = 0$ ή $G1 = 0$).

Ορισμός 2.24. Λέμε ότι η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ είναι *ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή*, αν

$$\lim_{h \downarrow 0} P_{ii}(h) = 1, \text{ ομοιόμορφα για κάθε } i \in S.$$

Προφανώς, αν ισχύει ο προηγούμενος ορισμός, τότε $\lim_{h\downarrow 0} P_{ij}(h) = 0$, ομοιόμορφα για $i, j \in S, i \neq j$ (επειδή $P_{ij}(t) \leq 1 - P_{ii}(t)$, για κάθε $t \geq 0$). Επιπλέον, αν η ημι-ομάδα μεταβάσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή, τότε είναι και συνεχής στην αρχή, ενώ, γενικώς, το αντίστροφο ισχύει στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος.

Θεώρημα 2.16. (**Οι Εξισώσεις του Kolmogorov**.) *Αν $\{P(t) \colon t \geq 0\}$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής ημι-ομάδα μεταβάσεων με γεννήτορα G, τότε η $P(t)$ είναι η μοναδική λύση των εξής διαφορικών εξισώσεων πινάκων:*

(i) της προς τα εμπρός εξίσωσης του Kolmogorov:

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)G, \quad t > 0,$$

δηλαδή, σαν σύστημα εξισώσεων (παραλείποντας το όρισμα του χρόνου),

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = P_{ij}(t)G_{jj} + \sum_{k\in S,\, k\neq j} P_{ik}(t)G_{kj}, \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } t > 0,$$

(ii) της προς τα πίσω εξίσωσης του Kolmogorov:

$$\frac{d}{dt}P(t) = GP(t), \quad t > 0,$$

δηλαδή, σαν σύστημα εξισώσεων,

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = G_{ii}P_{ij}(t) + \sum_{k\in S,\, k\neq i} G_{ik}P_{kj}(t), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } t > 0.$$

με την αρχική συνθήκη $P(0) = I$. Επιπλέον, ισχύουν:

$$P(t) = e^{tG}, \text{ για } t \geq 0, \text{ και } \quad G1 = 0.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι, ειδικότερα όταν S πεπερασμένο, ο εκθετικός πίνακας $P = e^{tG}$ δίνεται ως το εξής ανάπτυγμα δυνάμεων του πίνακα G:

$$P(t) = e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}G^n, \quad t \geq 0.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει το χαρακτηρισμό των πινάκων, που μπορούν να είναι γεννήτορες ομοιόμορφα συνεχών ημιο-ομάδων.

Θεώρημα 2.17. *Ένας πίνακας $A = \{A_{ij} \colon i, j \in S\}$, τέτοιος ώστε $\sup_{i\in S}\sum_{j\in S}|A_{ij}|$, είναι ο γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημι-ομάδας μεταβάσεων $P(t)$ αν και μόνον αν*

$$A_{ij} \geq 0, \text{ για κάθε } i, j \in S, i \neq j, \text{ και } \sum_{j\in S} A_{ij} = 0, \text{ για όλα τα } i \in S.$$

Ορισμός 2.25. Δοθείσης της αλυσίδας Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ και της κατάστασης $i \in S$, όταν $X(s) = i$ (σε κάποιο χρόνο $s \geq 0$), ορίζουμε το *χρόνο στάσης* (*holding time*) της αλυσίδας στην κατάσταση i ως:

$$U_i = \inf\{t \geq 0 \colon X(s + t) \neq i\}.$$

Πρόταση 2.10. *Έστω η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G. Τότε ισχύουν τα εξής:*

- *Η $P(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή αν και μόνον αν $\sup_{i \in S} G_{ii} < \infty$.*
- *Η τυχαία μεταβλητή U_i του χρόνου στάσης στην κατάσταση i κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο $-G_{ii}$, για κάθε $i \in S$.*
- *Επιπλέον, η πιθανότητα η αλυσίδα να μεταπηδήσει στην κατάσταση j, έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i, είναι $-G_{ij}/G_{ii}$, για κάθε $i, j \in S$.*

Ορισμός 2.26. Δοθείσης της ημι-ομάδας μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G, μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται:

- *στιγμιαία*, αν $G_{ii} = -\infty$,
- *ευσταθής*, αν $0 > G_{ii} > -\infty$,
- *απορροφητική* (*absorbing*), $G_{ii} = 0$.

Θεώρημα 2.18. *Έστω μια αλυσίδα Markov με συνεχή στην αρχή ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$ και αντίστοιχο γεννήτορα G. Αν η αλυσίδα είναι συντηρητική ($G1 = 0$) και όλες οι καταστάσεις είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$), τότε ισχύει η προς τα πίσω εξίσωση του Kolmogorov ($\frac{d}{dt}P(t) = GP(t)$). Αν, επιπλέον, $\sum_{k \in S} G_{kk} P_{ik}(t) > -\infty$, για κάθε $i \in S$ και $t \geq 0$, τότε ισχύει και η προς τα εμπρός εξίσωση του Kolmogorov ($\frac{d}{dt}P(t) = P(t)G$).*

Πρόταση 2.11. *Έστω η αλυσίδα Markov $X(t)$ με διάνυσμα κατανομής $\mu^{(t)} = \{\mu_i^{(t)} = P(X(t) = i) \colon i \in S\}$, για $t \geq 0$, με συνεχή στην αρχή ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$ και αντίστοιχο γεννήτορα G. Αν η αλυσίδα είναι συντηρητική ($G1 = 0$), όλες οι καταστάσεις είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$), και $\sum_{i \in S} G_{ii} \mu_i^{(t)} > -\infty$, για κάθε $t \geq 0$, τότε ισχύει η εξής ολική εξίσωση του Kolmogorov:*

$$\frac{d}{dt}\mu_i^{(t)} = G_{ii}\mu_i^{(t)} + \sum_{k \in S,\, k \neq i} G_{ki}\mu_k^{(t)}, \quad t > 0.$$

2.2. Ταξινόμηση Καταστάσεων

Θεώρημα 2.19. *Έστω η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε $i \in S, P_{ii}(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$.*

(ii) *Διχοτομία του Levy: για κάθε $i \in S, i \neq j$, είτε $P_{ij}(t) = 0$, για κάθε $t > 0$, ή $P_{ij}(t) > 0$, για κάθε $t > 0$.*

Ορισμός 2.27. Μια ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G, ονομάζεται *αδιαχώριστη* (ή *μη διαχωρίσιμη* ή *μη αναγώγιμη*) (*irreducible*), αν, για κάθε $i, j \in S$, $P_{ij}(t) > 0$, για κάποιο και, άρα, και για κάθε $t > 0$.

Ορισμός 2.28. Δοθείσης μιας αλυσίδας Markov $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ στον (αριθμήσιμο) χώρο καταστάσεων S, μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται *επαναφερόμενη* (ή *επαναλαμβανόμενη*) (*recurrent*) για την X, όταν

$$P(\text{το σύνολο } \{t \geq 0 \colon X(t) = i\} \text{ να είναι μη φραγμένο} \mid X(0) = i) = 1,$$

και η i ονομάζεται *παροδική* (*transient*) για την X, όταν

$$P(\text{το σύνολο } \{t \geq 0 \colon X(t) = i\} \text{ να είναι μη φραγμένο} \mid X(0) = i) = 0.$$

Ορισμός 2.29. Έστω μια αλυσίδα Markov $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ στον S. Συμβολίζουμε με T_n το χρόνο της n-οστής αλλαγής καταστάσεων της αλυσίδας X, όπου υποθέτουμε ότι $T_0 = 0$. Έστω η στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου, που ορίζεται από τη σχέση

$$Z_n = X(T_n+),$$

δηλαδή, η στοχαστική διαδικασία των τιμών που παίρνει η αλυσίδα X αμέσως μετά τις αλλαγές των καταστάσεών της. Τότε η Z_n αποτελεί μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, η οποία ονομάζεται *αλυσίδα μεταπτώσεων* (*jump chain*) της X.

Πρόταση 2.12. *Η αλυσίδα μεταπτώσεων είναι συντηρητική ($G1 = 0$) και όλες οι καταστάσεις της είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$).*

Παρατήρηση 2.4. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η Z_n έχει πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $H_{ij} = -G_{ij}/G_{ii}$, όταν $G_{ii} < 0$. Φυσικά, όταν $G_{ii} = 0$, η αλυσίδα Z_n παραμένει στην κατάσταση i, εφόσον πάει εκεί κάποτε. Επιπλέον, αν $Z_n = j$, ο χρόνος στάσης $T_{n+1} - T_n$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $-G_{jj}$.

Ορισμός 2.30. Έστω T_n ο χρόνος της n-οστής αλλαγής καταστάσεων της αλυσίδας Markov X ($T_0 = 0$). Τότε ορίζουμε μια αλυσίδα Markov (συνεχούς χρόνου) από τις σχέσεις:

$$X(t) = \begin{cases} Z_n, & \text{αν } T_n \leq t < T_{n+1}, \\ \infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n < \infty$, το T_∞ ονομάζεται *χρόνος έκρηξης* της αλυσίδας X και λέμε ότι η αλυσίδα αυτή *εκρήγνειται*, αν $P(T_\infty < \infty) > 0$.

Θεώρημα 2.20. *Η αλυσίδα X, που κατασκευάσθηκε πιο πάνω, δεν μπορεί να εκραγεί, αν ικανοποιείται μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:*

(i) *S πεπερασμένο.*

(ii) $\sup_{i\in S} G_{ii} > -\infty$.

(iii) *$X(0) = i$, όπου i είναι μια επαναφερόμενη κατάσταση για την αλυσίδα μεταπτώσεων Z.*

Θεώρημα 2.21. *Έστω πάλι η αλυσίδα X, που κατασκευάσθηκε πιο πάνω.*

(i) *Αν $G_{ii} = 0$, τότε η κατάσταση i είναι μια επαναφερόμενη κατάσταση για την παραπάνω αλυσίδα συνεχούς χρόνου X.*

(ii) *Όταν $G_{ii} = 0$, η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη για την αλυσίδα συνεχούς χρόνου X αν και μόνον αν είναι επαναφερόμενη για την αλυσίδα μεταπτώσεων Z. Επιπλέον, η i είναι επαναφερόμενη, αν οι πιθανότητες μεταβάσεων $P_{ii}(t) = P(X(t) = i \,|\, X(0) = i)$ ικανοποιούν τη συνθήκη $\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \infty$, και είναι παροδική, διαφορετικά.*

2.3. Στάσιμες Κατανομές

Ορισμός 2.31. Ένα διάνυσμα σειράς $\pi = (\pi_j : j \in S)$ λέγεται ότι αποτελεί μια *στάσιμη κατανομή* της αλυσίδας Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, η οποία έχει ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, αν το π ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

(i) $\pi_j \geq 0$, για κάθε $j \in S$, και $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$, και

(ii) $\pi P(t) = \pi$, για κάθε $t \geq 0$, με την έννοια ότι $\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}(t) = \pi_j$, για κάθε $j \in S$ και κάθε $t \geq 0$.

Παρατήρηση 2.5. Παρατηρούμε ότι η πρώτη από τις δυο συνθήκες του προηγούμενου ορισμού λέει ότι το π είναι ένα διάνυσμα (μέτρου) πιθανότητας. Επιπλέον, έστω $\mu^{(t)} = \{\mu_i^{(t)} = P(X(t) = i) \colon i \in S\}$, για $t \geq 0$, το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής (συνεχούς χρόνου) $X(t)$. Επειδή από τις εξισώσεις Chapamn-Kolmogorov παίρνουμε $\mu^{(t)} = \mu^{(0)} P(t)$, η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται ότι, αν $\mu^{(0)} = \pi$, τότε $\mu^{(t)} = \pi P(t) = \pi$, για κάθε $t > 0$, δηλαδή, το διάνυσμα π αποτελεί ένα *αναλλοίωτο μέτρο* (πιθανότητας) για την αλυσίδα Markov.

Πρόταση 2.13. *Έστω μια αλυσίδα Markov με συνεχή στην αρχή ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$ και αντίστοιχο γεννήτορα G. Αν η αλυσίδα είναι συντηρητική ($G1 = 0$), όλες οι καταστάσεις είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$), και υπάρχει η στάσιμη κατανομή π ($\pi P(t) = \pi$, για κάθε $t \geq 0$) τέτοια ώστε $\sum_{j \in S} G_{jj} \pi_j > -\infty$, τότε ισχύει η εξής ολική εξίσωση ισοζυγίου:*

$$\pi G = 0,$$

δηλαδή, το σύστημα:

$$G_{jj} \pi_j = \sum_{i \in S,\, i \neq j} G_{ij} \pi_i, \text{ για κάθε } j \in S \text{ και κάθε } t > 0.$$

Πρόταση 2.14. *Έστω η αλυσίδα Markov $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ σε ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S, με ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G. Τότε υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π ($\pi P(t) = \pi$, για κάθε $t \geq 0$) αν και μόνον αν ισχύει η εξής ολική εξίσωση ισοζυγίου:*

$$\pi G = 0.$$

Θεώρημα 2.22. *Έστω η αδιαχώριστη αλυσίδα Markov $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, η οποία έχει ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$.*

(i) Αν υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π, τότε αυτή είναι μοναδική και

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \pi_j \text{ για κάθε } i, j \in S.$$

(ii) Αν δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = 0 \text{ για κάθε } i, j \in S.$$

Παράδειγμα 2.8. Έστω η αλυσίδα Markov X στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2\}$. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ο γεννήτορας G του πίνακα μεταβάσεων $P(t)$ της αλυσίδας αυτής:

$$G = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Ζητούμε να βρούμε πίνακα μεταβάσεων $P(t)$ και τη στάσιμη κατανομή π της αλυσίδας αυτής.

Διαγωνικοποιώντας τον G, βρίσκουμε $G = BAB^{-1}$, όπου

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{t^n}{n!} G^n = B\big(\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{t^n}{n!} A^n\big) B^{-1} \\
&= B \begin{pmatrix} h(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} \\
&= \tfrac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha h(t) + \beta & \alpha[1-h(t)] \\ \beta[1-h(t)] & \alpha + \beta h(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

όπου $h(t) = e^{-t(\alpha+\beta)}$. Έτσι, βρίσκουμε το όριο

$$
\lim_{t\to\infty} P(t) = \begin{pmatrix} 1-\rho & \rho \\ 1-\rho & \rho \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \rho = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},
$$

και, άρα,

$$
\lim_{t\to\infty} P(X(t) = i) = \begin{cases} 1-\rho, & \text{αν } i = 1, \\ \rho, & \text{αν } i = 2, \end{cases}
$$

ανεξάρτητα από την αρχική κατανομή του $X(0)$. Με άλλα λόγια, $\pi = (1-\rho, \rho)$ είναι η στάσιμη κατανομή αυτής της αλυσίδας. Βέβαια, η κατανομή αυτή θα μπορούσε να είχε βρεθεί και από τη σχέση $\pi G = 0$.

2.4. Διαδικασία Poisson

Γενικώς, μια διαδικασία Poisson είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, όπου οι παρατηρούμενες μεταβλητές είναι οι τυχαίοι χρόνοι, στους οποίους μια ακολουθία γεγονότων μπορεί να συμβεί. Ειδικότερα, τα γεγονότα αυτά θεωρούνται ότι είναι διαφορετικοί τύποι αφίξεων, π.χ., πελατών σε μια ουρά, πακέτων δεδομένων σε έναν κόμβο ενός δικτύου υπολογιστών, σωματιδίων σε ένα μετρητή Geiger κ.ο.κ. Πιο συγκεκριμένα, ο πλήρης ορισμός της διαδικασίας Poisson είναι ως εξής:

Ορισμός 2.32. Μια *διαδικασία Poisson με ένταση* λ (μερικές φορές συμβολιζόμενη ως $PP(\lambda)$) είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $N = \{N(t) : t \geq 0\}$, η οποία παίρνει τιμές στο $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και είναι τέτοια ώστε:

(i) $N(0) = 0$ και, αν $s < t$, τότε $N(s) \leq N(t)$,

(ii) $P(N(t+h) = n+m \,|\, N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & \text{αν } m = 1, \\ o(h), & \text{αν } m > 1, \\ 1 - \lambda h + o(h), & \text{αν } m = 0, \end{cases}$

όπου $g(h) = o(h)$ σημαίνει ότι $\frac{g(h)}{h} \to 0$, καθώς $h \downarrow 0$,

(iii) ερμηνεύοντας τις τυχαίες μεταβλητές N σαν χρόνους αφίξεων, ο αριθμός των αφίξεων $N(t) - N(s)$ στο χρονικό διάστημα $(s, t]$ είναι ανεξάρτητος από τις αφίξεις $N(\tau)$, για $\tau \in (0, s]$.

Πρόταση 2.15. *Η διαδικασία Poisson με ένταση λ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt, δηλαδή,*

$$
P(N(t) = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \, .
$$

Πρόταση 2.16. *Η διαδικασία Poisson με ένταση λ είναι μια αλυσίδα Markov (συνεχούς χρόνου) $N = \{N(t) \colon t \geq 0\}$, η οποία παίρνει τιμές στο $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.*

Με ένα διαφορετικό τρόπο, μια διαδικασία Poisson περιγράφεται ως εξής: Έστω μια ακολουθία χρόνων $T_0, T_1, \ldots$, που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$
T_0 = 0, \quad T_n = \inf\{t \geq 0 \colon N(t) = n\},
$$

δηλαδή, ο χρόνος T_n θεωρείται ότι είναι ο χρόνος της n-οστής άφιξης. Τότε μπορούν να ορισθούν τα *χρονικά διαστήματα μεταξύ αφίξεων* σαν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$X_n = T_n - T_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Αν γνωρίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές N, μπορούμε να βρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$. Αλλά και αντιστρόφως, από τα X_i μπορύμε να ανακατασκευάσουμε τα N ως εξής:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad N(t) = \max\{n = 1, 2, \ldots : T_n \le t\}.$$

Πρόταση 2.17. *Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και κάθε μια από αυτές ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ αν και μόνον αν η N είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση λ.*

2.5. Διαδικασίες Γέννησης και Θανάτου

Ορισμός 2.33. Μια *διαδικασία γέννησης και θανάτου* είναι μια αλυσίδα Markov (συνεχούς χρόνου) $X = \{X(t) : t \ge 0\}$, η οποία παίρνει τιμές στο $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και είναι τέτοια ώστε:

(i) $$P(X(t+h) = n+m \mid X(t) = n) = \begin{cases} \lambda_n h + o(h), & \text{αν } m = 1, \\ \mu_n h + o(h), & \text{αν } m = -1, \\ o(h), & \text{αν } |m| > 1, \\ 1 - (\lambda_n + \mu_n)h + o(h), & \text{αν } m = 0, \end{cases}$$

(ii) οι *ρυθμοί γεννήσεων* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ και οι *ρυθμοί θανάτων* $\mu_0, \mu_1, \ldots$ είναι $\lambda_i \ge 0, \mu_i \ge 0, \mu_0 = 0$.

Πρόταση 2.18. *Ο γεννήτορας της διαδικασίας γέννησης και θανάτου $G = \{G_{ij} : i, j \ge 0\}$ είναι*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Άρα, η αλυσίδα αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή αν και μόνον αν $\sup_{i=0,1,\ldots} \sup\{\lambda_i + \mu_i\} < \infty$.

Παρατήρηση 2.6. Η αλυσίδα γέννησης και θανάτου είναι αδιαχώριστη, εκτός αν $\lambda_0 = 0$, οπότε η κατάσταση 0 είναι απορροφητική.

Από την εξίσωση ολικού ισοζυγίου ($\pi G = 0$), έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 &= 0, \\ \lambda_{n-1}\pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1}\pi_{n+1} &= 0, \text{ για } n \ge 1, \end{aligned}$$

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τη μοναδική στάσιμη κατανομή π:

Πρόταση 2.19.

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\pi_0, \quad \text{για } n \ge 1, \qquad \pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\right)^{-1},$$

αν και μόνον αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} < \infty,$$

όπου ο όρος $n = 0$ *λαμβάνεται ως* 1.

Πόρισμα 2.8. *Έστω η αλυσίδα γέννησης και θανάτου με ρυθμούς* $\lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu$, *για* $n = 0, 1, 2, \dots$. *Τότε, καθώς* $t \to \infty$, *η τυχαία μεταβλητή* $X(t)$ *ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο* $\rho = \lambda/\mu$, *δηλαδή,*

$$\lim_{t \to \infty} P(X(t) = n) = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

3. Διαδικασίες Ανανέωσης και Ουρές

3.1. Διαδικασίες Ανανέωσης

Ορισμός 3.34. Μια *διαδικασία ανανέωσης* (*renewal process*) $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου τέτοια ώστε

$$N(t) = \max\{n \colon T_n \leq t\},$$

όπου $T_0 = 0, T_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, για $n \geq 1$, και $\{X_i\}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, που παίρνουν μη αρνητικές τιμές.

Συνήθως, αυτό που καταλαβαίνουμε με μια διαδικασία ανανέωσης είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές $N(t)$ αναπαριστούν το πλήθος των φορών, στις οποίες συμβαίνει κάποιο επαναλαμβανόμενο γεγονός κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[0, t]$, όπως, π.χ., το πλήθος αφίξεων ή άλλων χαρακτηριστικών συμβάντων. Με την έννοια αυτή, θα ονομάζουμε το T_n "*χρόνο της n-οστής άφιξης*" και το X_n "*n-οστό χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων*".

Παρατήρηση 3.7. Για τον ορισμό μιας διαδικασίας ανανέωσης αρκεί να δίνεται απλώς μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $N = \{N(t)\}$ (που παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές και είναι μη φθίνουσα), από την οποία μπορεί να ορισθούν η ακολουθία T_n των χρόνων των αφίξεων και η ακολουθία X_n των χρονικών διαστημάτων μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων ως εξής:

$$T_n = \inf\{t \colon N(t) = n\}, \quad X_n = T_n - T_{n-1},$$

έτσι ώστε η $\{X_n\}$ να είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών (μη αρνητικών τιμών).

Θεώρημα 3.23. *Κάθε διαδικασία Poisson είναι μια διαδικασία ανανέωσης. Επιπλέον, η διαδικασία Poisson είναι η μοναδική διαδικασία ανανέωσης, που είναι αλυσίδα Markov.*

Ορισμός 3.35. Η συνάρτηση ανανέωσης $m(t)$ ορίζεται σαν η μέση τιμή του $N(t)$, δηλαδή,

$$m(t) = E(N(t)).$$

Θεώρημα 3.24. *Αν $\mu = E(X_1) < \infty$, τότε*

$$\frac{1}{t} N(t) \xrightarrow{\sigma.\sigma.} \frac{1}{\mu}, \text{ καθώς } t \to \infty,$$

Παραπάνω, "$\sigma.\sigma.$" σημαίνει "*σχεδόν σίγουρα*", δηλαδή, ότι η πιθανότητα να συμβεί κάποιο γεγονός (εδώ, η σύγκλιση του παραπάνω ορίου) είναι 1.

Θεώρημα 3.25. *Αν $\mu = E(X_1) < \infty$, τότε*

$$\frac{1}{t} m(t) \to \frac{1}{\mu}, \text{ καθώς } t \to \infty.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τη χρονική στιγμή t αρχίζουμε να παρατηρούμε μια διαδικασία ανανέωσης N. Ως τότε έχουν ήδη λάβει χώρα $N(t)$ συμβάντα, ας πούμε, αφίξεις, και η ακριβώς επόμενη άφιξη θα είναι η $(N(t)+1)$-οστή. Με άλλα λόγια, ο χρόνος t ανήκει στο τυχαίο διάστημα $I_t = [T_{N(t)}, T_{N(t)+1})$. Τότε, έχει μεγάλο ενδιαφέρον να μπορούμε να προσδιορίσουμε τις εξής τρεις τυχαίες μεταβλητές:

(i) Ο *υπόλοιπος χρόνος ζωής* στο t του I_t: $E(t) = T_{N(t)+1} - t$.

(ii) Ο *παρών χρόνος ζωής* στο t του I_t: $C(t) = t - T_{N(t)}$.

(iii) Ο *συνολικός χρόνος ζωής* στο t του I_t: $D(t) = E(t) + C(t) = X_{N(t)+1}$.

3.2. Διαδικασίες Ανανέωσης-Αμοιβής και το Θεώρημα του Little

Έστω η διαδικασία ανανέωσης $N = N(t)$ ορισμένη ως $N(t) = \sup\{n\colon T_n \leq t\}$, όπου $T_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Θεωρούμε τότε τα ζευγάρια $\{(X_i, R_i) : i \geq 1\}$ των ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών X_i και R_i με $X_i \geq 0$ (αλλά μεταξύ τους οι τυχαίες μεταβλητές X_i και R_i δεν υποτίθεται ότι είναι ανεξάρτητες). Η τυχαία μεταβλητή X_i είναι ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων της διαδικασίας ανανέωσης N και η τυχαία μεταβλητή R_i θεωρείται ότι είναι κάποια '*αμοιβή*,' που απονέμεται μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων της N. Βέβαια, η αμοιβή θα μπορούσε να ήταν αρνητική, οπότε θα τη θεωρούσαμε σαν '*κόστος*'.

Ορίζουμε τη *διαδικασία συνολικής αμοιβής* $C = C(t)$ ως

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i$$

και τη *συνάρτηση αμοιβής* $c(t)$ ως τη μέση τιμή της $C(t)$, δηλαδή,

$$c(t) = E(C(t)).$$

Σε ό,τι ακολουθεί στην παράγραφο αυτή, θα συμβολίζουμε $X = X_1$ και $R = R_1$.

Θεώρημα 3.26. (**Θεώρημα Ανανέωσης-Αμοιβής**.) *Αν $0 < E(X) < \infty$ και $E(|R|) < \infty$, τότε*

$$\frac{C(t)}{t} \xrightarrow{\sigma.\sigma.} \frac{E(R)}{E(X)}, \quad \text{καθώς } t \to \infty,$$

$$\frac{c(t)}{t} \longrightarrow \frac{E(R)}{E(X)}, \quad \text{καθώς } t \to \infty.$$

Θα εφαρμόσουμε, στη συνέχεια, το θεώρημα ανανέωσης-αμοιβής για ένα σύστημα ουράς αναμονής. Παρότι θα ασχοληθούμε λεπτομερέστερα με διαδικασίες ουρών στην επόμενη παράγραφο, ας πούμε εδώ ότι με μια "*ουρά αναμονής και εξυπηρέτησης*" εννοούμε ένα σύστημα, στο οποίο οι πελάτες φθάνουν ένας-ένας μπροστά σε μια μονάδα (ή, γενικώς, περισσότερες) εξυπηρέτησης για να εξυπηρετηθούν με τη σειρά. Ο n-οστός πελάτης δαπανά ένα *χρόνο αναμονής* στο σύστημα (συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου εξυπηρέτησης) και μετά αναχωρεί.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει σχεδόν σίγουρα (δηλαδή, με πιθανότητα 1) ένας πεπερασμένος (τυχαίος) χρόνος $T > 0$, ο οποίος ονομάζεται *χρόνος αναγέννησης* και είναι τέτοιος ώστε η διαδικασία, που αρχίζει το χρόνο T, να έχει την ίδια κατανομή με την αντίστοιχη διαδικασία, που αρχίζει το χρόνο 0. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα $Q(t)$ το χρόνο t είναι τέτοιος ώστε $Q(0) = Q(T) = 0$. Με άλλα λόγια, υπάρχει μια ακολουθία χρόνων $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$, κάθε ένας από τους οποίους είναι χρόνος αναγέννησης της διαδικασίας, έτσι ώστε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ δυο διαδοχικών χρόνων αναγέννησης $X_i = T_i - T_{i-1}$ να είναι ανεξάρτητα και όμοια κατανεμημένα. Με άλλα λόγια, η ουρά, που εξετάζουμε, είναι η διαδικασία ανανέωσης των παραπάνω χρόνων αναγέννησης.

Τα χρονικά διαστήματα $[T_{i-1}, T_i)$ συνήθως ονομάζονται *κύκλοι* αυτής της διαδικασίας. Παρατηρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία $P_i = \{Q(t) : T_{i-1} \leq t < T_i\}, i \geq 1$, αποτελείται από ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Γράφουμε N_i για τον αριθμό των πελατών, που φθάνουν κατά τη διάρκεια του κύκλου $[T_{i-1}, T_i)$, και συμβολίζουμε $N = N_1, T = T_1$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα σημεία αναγέννησης επιλέγονται έτσι ώστε $N_i > 0$, για κάθε i. Τέλος, υποθέτουμε ότι

$$E(T) < \infty, \quad E(N) < \infty, \quad E(NT) < \infty.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ανανέωσης-αμοιβής τρεις φορές, καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

(A) Θεωρούμε τη διαδικασία ανανέωσης-αμοιβής με χρόνους αφίξεων $T_0, T_1, T_2, \dots$, στην οποίαν αμοιβή στο χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων $X_i = T_i - T_{i-1}$ ορίζεται ως:

$$R_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} Q(u)\,du.$$

Οι R_i έχουν την ίδιαν κατανομή με την $R = R_1 = \int_0^T Q(u)\,du$. Επιπλέον, $Q(u) \le N$, όταν $0 \le u \le T$, και, άρα, $E(R) \le E(NT) < \infty$. Επομένως, από το θεώρημα ανανέωσης-αμοιβής παίρνουμε:

$$\frac{1}{t}\int_0^t Q(u)\,du \xrightarrow{\sigma.\sigma.} \frac{E(R)}{E(T)}, \quad \text{καθώς } t \to \infty.$$

Ο λόγος $E(R)/E(T)$ ονομάζεται *ασυμπτωτικό μέσο μήκος ουράς* και συμβολίζεται με L.

(B) Θεωρούμε στη συνέχεια μια δεύτερη διαδικασία ανανέωσης-αμοιβής με χρόνους αφίξεων $T_0, T_1, T_2, \dots$, στην οποίαν η αμοιβή στο χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων ορίζεται τώρα να είναι ίση με τον αριθμό N_i των πελατών, που φθάνουν κατά τη διάρκεια του αντίστοιχου κύκλου. Πάλι από το θεώρημα ανανέωσης-αμοιβής παίρνουμε:

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{\sigma.\sigma.} \frac{E(N)}{E(T)}, \quad \text{καθώς } t \to \infty.$$

Ο λόγος $E(N)/E(T)$ ονομάζεται *ασυμπτωτικός ρυθμός αφίξεων* και συμβολίζεται με λ.

(C) Τέλος, θεωρούμε τη διαδικασία ανανέωσης-αμοιβής με χρονικά διαστήματα μεταξύ δυο διαδοχικών χρόνων αφίξεων $N_1, N_2, \dots$, στην οποίαν η αμοιβή S_i στο διάστημα N_i μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων ορίζεται ίση με το άθροισμα των χρόνων αναμονής των πελατών, που φθάνουν κατά τη διάρκεια του i-οστού κύκλου της ουράς. Πάλι από το θεώρημα ανανέωσης-αμοιβής παίρνουμε:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i \xrightarrow{\sigma.\sigma.} \frac{E(S)}{E(N)}, \quad \text{καθώς } t \to \infty.$$

Ο λόγος $E(S)/E(N)$ ονομάζεται *ασυμπτωτικός μέσος χρόνος αναμονής* και συμβολίζεται με W.

Θεώρημα 3.27. (**Το Θεώρημα του Little.**) *Για κάθε διαδικασία ανανέωσης-αμοιβής, έχουμε*

$$L = \lambda W.$$

3.3. Διαδικασίες Ουρών Αναμονής και Εξυπηρέτησης

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τις διαδικασίες ουρών αναμονής σαν διαδικασίες ανανέωσης. Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι οι πελάτες φθάνουν σε ένα σταθμό εξυπηρέτησης, στον οποίο λειτουργεί κάποιο συγκεκριμένο πλήθος μονάδων (ή συστημάτων) εξυπηρέτησης, για κάποιο καθορισμένο σκοπό, ανάλογα με την εφαρμογή, που μελετάμε. Επειδή, όταν φθάσει κάποιος πελάτης, είναι πιθανό όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης να είναι κατειλημμένες από άλλους πελάτες, για αυτό, μπορεί οι πελάτες που φθάνουν στο σταθμό εξυπηρέτησης να πρέπει να περιμένουν για κάποιο χρονικό διάστημα μέχρις ότου να αδειάσει μια μονάδα εξυπηρέτησης και μετά αυτά να εξυπηρετηθούν (εκτός αν, όταν όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης είναι κατειλημμένες, οι πελάτες είναι υποχρεωμένοι να φύγουν). Γενικώς πάντως, όταν έρθει η σειρά του, ένας πελάτης εξυπηρετείται από το σύστημα και αμέσως μετά φεύγει.

Για να περιγράψουμε ένα τέτοιο σύστημα επακριβώς, πρέπει πρώτα να έχουμε περισσότερες πληροφορίες για το πώς γίνονται κάποιες λεπτομέρειες της διαδικασίας αυτής. Για παράδειγμα, χρειάζεται να γνωρίζουμε τέτοια ζητήματα, όπως πώς ακριβώς εισέρχονται στο σύστημα οι πελάτες, με ποια σειρά εξυπηρετούνται και πόσο διαρκεί η περίοδος της εξυπηρέτησής τους. Κάποιες γενικές απαντήσεις στα ζητήματα αυτά δίνονται με τις παρακάτω διευκρινίσεις:

(i) Ο αριθμός $N(t)$ των πελατών, που έχουν εισέλθει στο σύστημα μέχρι το χρόνο t, αποτελεί μια διαδικασία ανανέωσης. Δηλαδή, αν T_n είναι ο χρόνος άφιξης του n-οστού πελάτη (με τη σύμβαση ότι $T_0 = 0$), τότε τα *χρονικά διαστήματα μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων* $X_n = T_n - T_{n-1}$ σχηματίζουν μια ανεξάρτητα και όμοια κατανεμημένη στοχαστική διαδικασία.

(ii) Οι τελευταία αφικνιόμενοι πελάτες εισέρχονται στο τέλος της ουράς αναμονής, δηλαδή, η εξυπηρέτηση των πελατών ακολουθεί τον κανόνα: "*αυτός που φθάνει πρώτος, εξυπηρετείται και πρώτος*" (στα αγγλικά "*First In, First Out*"). Με την έννοια (επειδή μπορεί να υπάρχουν περισσότερες της μιας μονάδες εξυπηρέτησης) ότι υπάρχει μια μοναδική ουρά ανομονής και, όταν μια μονάδα εξυπηρέτησης αφήνεται ελεύθερη, τότε ο πρώτος στην ουρά (σειρά) πελάτης πηγαίνει εκεί για να εξυπηρετηθεί.

(iii) Συμβολίζοντας με S_n το *χρόνο εξυπηρέτησης* του n-οστού πελάτη, υποθέτουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης S_n είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες δεν εξαρτώνται από το χρόνο άφιξης των πελατών. Ακόμη, έστω V_n ο συνολικός *χρόνος αναμονής* στο σύστημα του n-οστού πελάτη (συμπεριλαμβανομένου του χρόνου εξυπηρέτησης S_n).

Έστω αριθμός $Q(t)$ των πελατών στο σύστημα το χρόνο t (συμπεριλαμβανομένων κι εκείνων που εξυπηρετούνται τότε). Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η τιμή του ορίου του $Q(t)$, καθώς $t \to \infty$. Προφανώς, δεν είναι επιθυμητές διαδικασίες, για τις οποίες $\lim_{t\to\infty} Q(t) = \infty$. Έτσι, μια ουρά ονομάζεται *ευσταθής*, αν υπάρχει το όριο $\lim_{t\to\infty} Q(t)$, και διαφορετικά *ασταθής*.

Συμβολίζοντας με $E(S)$ τη μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας των χρόνων εξυπηρέτησης S_n και με $E(X)$ τη μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας των χρονικών διαστημάτων μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων X_n, ορίζουμε την *ένταση ρ της κυκλοφορίας της ουράς* σαν τον εξής λόγο:

$$\rho = \frac{E(S)}{E(X)}.$$

Θεώρημα 3.28. *Έστω $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ μια ουρά σε ένα σύστημα με μοναδική μονάδα εξυπηρέτησης. Έστω ρ η ένταση κυκλοφορίας της ουράς αυτής.*

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η ουρά Q είναι ευσταθής.

(ii) Αν $\rho > 1$, τότε η ουρά Q είναι ασταθής.

(iii) Αν $\rho = 1$ και τουλάχιστον μια από τις S_n και X_n έχει αυστηρά θετική μεταβλητότητα, τότε η ουρά Q είναι ασταθής.

3.4. Συμβολισμός Ουρών

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα, μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε ουρά αντιστοιχούν δυο ακολουθίες ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών: η ακολουθία $\{X_n : n \geq 1\}$ των χρονικών διαστημάτων μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων των πελατών με κοινή συνάρτηση κατανομής F_X και η ακολουθία $\{S_n : n \geq 1\}$ των χρόνων εξυπηρέτησης των πελατών με κοινή συνάρτηση κατανομής F_S. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις των πελατών γίνονται όπως στις διαδικασίες ανανέωσης, δηλαδή, γνωρίζουμε τα χρονικά διαστήματα X_n μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων, οπότε ο n-οστός πελάτης ξέρουμε ότι φθάνει το χρόνο $T_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Κάθε αφικνιόμενος πελάτης στέκεται στη μοναδική ουρά εξυπηρέτησης, όπου μπροστά του βρίσκονται όλοι οι πελάτες που έχουν ήδη φθάσει πριν από αυτόν και περιμένουν να εξυπηρετηθούν από τον πρώτο *εξυπηρετητή* (server), που θα είναι διαθέσιμος. Όταν έρθει η σειρά του n-οστού πελάτη να εξυπηρετηθεί, δηλαδή, όταν αυτός βρίσκεται στην κεφαλή της ουράς και συγχρόνως αδειάζει κάποιος εξυπηρετητής, ο n-οστός πελάτης θα εξυπηρετηθεί μέσα στο χρονικό διάστημα S_n και αμέσως μετά θα φύγει από το σύστημα. Συμβολίζουμε με $Q(t)$ τον αριθμό των πελατών, που βρίσκονται στην ουρά της αναμονής εξυπηρέτησης το χρόνο t (συμπεριλαμβανομένων κι εκείνων που εξυπηρετούνται το χρόνο t), και, φυσικά, έχουμε $Q(0) = 0$. Προφανώς, η $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία, της οποίας οι κατανομές εξαρτώνται από τις συναρτήσεις κατανομών F_X και F_S. Επομένως, διάφορα ζητήματα, που μας ενδιαφέρουν να κατανοήσουμε (όπως, π.χ., αν η Q είναι ή όχι διαδικασία Markov, ποια είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $Q(t)$, καθώς $t \to \infty$, κ.ο.κ.) εξαρτώνται από τον επακριβή καθορισμό των συναρτήσεων κατανομών F_X και F_S.

Έτσι, για να περιγραφεί επακριβώς μια ουρά, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $A/B/s$, που εισήχηθκε από τον D. Kendall, όπου το A καθορίζει την F_X, το B την F_S και το s τον αριθμό των μονάδων εξυπηρέτησης (εξυπηρετητών) του συστήματος. Τυπικές περιπτώσεις για τα A και B είναι:

$$
\begin{aligned}
D(d) &\equiv \text{κατανομή σχεδόν σίγουρα συγκεντρωμένη στην τιμή } d \text{ (} D \text{ από το '\textit{ντετερμινιστική}')}, \\
M(\lambda) &\equiv \text{εκθετική κατανομή με παράμετρο } \lambda \text{ (} M \text{ από το '\textit{Μαρκοβιανή}')}, \\
\Gamma(\lambda, k) &\equiv \text{κατανομή γάμμα με παραμέτρους } \lambda \text{ και } k, \\
G &\equiv \text{κάποια γενική κατανομή, σταθερή αλλά μη καθορισμένη.}
\end{aligned}
$$

Αναφορικά τώρα με τον επακριβή τρόπο, με τον οποίον γίνεται η εξυπηρέτηση των πελατών, ας επανελάβουμε ότι υποθέτουμε πως ακολουθείται ο κανόνας *FIFO*, αρχικά προερχόμενα από την αγγλική έκφραση "*First In, First Out*", με την οποίαν εννοούμε ότι "*αυτός που φθάνει πρώτος, εξυπηρετείται και πρώτος.*"

Μερικές φορές όμως, αντί του $A/B/s$, χρησιμοποιείται ο αναλυτικότερος συμβολισμός $A/B/s/K/N$, όπου K είναι η *χωρητικότητα* του συστήματος εξυπηρέτησης και N το συνολικό πλήθος των πελατών, που θέλουν να εξυπηρετηθούν από το σύστημα αυτό. Η χωρητικότητα K $(\geq s)$ του συστήματος καθορίζει το επιτρεπόμενο πλήθος πελατών, που μπορούν ταυτόχρονα να περιμένουν να εξυπηρετηθούν από τις μονάδες εξυπηρέτησης του συστήματος (συμπεριλαμβανομένων των s πελατών, που εξυπηρετούνται τον ίδιο χρόνο). Αυτό σημαίνει ότι, αν κάποια στιγμή βρίσκονται στο σύστημα K πελάτες, τότε το σύστημα διώχνει (είναι κλειστό για) όλους τους άλλους πελάτες, που έρχονται στη συνέχεια, πριν αδειάσει κάποιος εξυπηρετητής. Πάντως, ακολουθούμε την τυπική σύμβαση ότι, αν είναι απόν ένα από τα δυο τελευταία ορίσματα στον αναλυτικό συμβολισμό των ουρών, τότε υποθέτουμε πως το απόν όρισμα παίρνει την τίμη άπειρο.

Επιπλέον, ας παρατηρήσουμε ότι συνήθως η κατανομή $M(\lambda)$ στο συμβολισμό των ουρών γράφεται σε συντομία απλώς σαν M (για παράδειγμα, συνήθως γράφουμε $M/M/1$ αντί του πληρέστερου συμβολισμού $M(\lambda)/M(\mu)/1$).

3.5. Ουρές $M/M/1$

Στην ουρά $M/M/1$, που είναι συντόμευση του $M(\lambda)/M(\mu)/1$, τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης πάλι εκθετικά με παράμετρο μ. Δηλαδή, οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ένταση λ σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, στο οποίο λειτουργεί μια μόνο μονάδα εξυπηρέτησης. Η διαδικασία του αριθμού $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ των εξυπηρετούμενων πελατών σχηματίζει μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου στο χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, \ldots\}$, λόγω του ότι η εκθετική κατανομή έχει την ιδιότητα να στερείται μνήμης. Επιπλέον, η Q είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με τους παρακάτω ρυθμούς:

$$\lambda_n = \lambda\,, \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \ldots\,, \qquad \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{αν } n \geq 1, \\ 0, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Οι πιθανότητες $p_n(t) = P(Q(t) = n)$ ικανοποιούν τις προς τα εμπρός εξισώσεις Kolmogorov:

$$\begin{aligned} \frac{dp_n}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad \text{για } n \geq 1, \\ \frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \end{aligned}$$

οι οποίες πρέπει να λυθούν μαζί με τις αρχικές συνθήκες $p_n(0) = \delta_{0n}$, το δέλτα του Kronecker. Για τη λύση των εξισώσεων αυτών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Laplace της p_n, που δίνεται ως

$$\widehat{p}_n(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} p_n(t)\, dt.$$

Θεώρημα 3.29. *Ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης των προς τα εμπρός εξισώσεων Kolmogorov είναι*

$$\widehat{p}_n(\theta) = \theta^{-1}[1 - \alpha(\theta)]\alpha(\theta)^n,$$

όπου

$$\alpha(\theta) = \frac{(\lambda + \mu + \theta) - \sqrt{(\lambda + \mu + \theta)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}.$$

Παρότι μπορεί να εξαχθεί σαν πόρισμα του προηγούμενου αποτελέσματος, είναι ευκολότερο να μελετήσουμε απευθείας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $Q(t)$, καθώς $t \to \infty$, για να βρούμε:

Θεώρημα 3.30. *Έστω $\rho = \lambda/\mu$ η ένταση της κυκλοφορίας της ουράς $M/M/1$.*

(i) Αν $\rho < 1$, τότε $\lim_{t\to\infty} P(Q(t) = n) = (1 - \rho)\rho^n = \pi_n$, για όλα τα $n \geq 0$, όπου $\pi = (\pi_n : n \geq 0)$ είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της Q.

(ii) Αν $\rho \geq 1$, τότε δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή της Q και $\lim_{t\to\infty} P(Q(t) = n) = 0$, για όλα τα $n \geq 0$.

3.6. Ουρές $M/M/s$ και $M/M/\infty$

Στην ουρά $M(\lambda)/M(\mu)/s$, οι πελάτες φθάνουν πάλι σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ένταση λ σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, στο οποίο λειτουργούν τώρα s μονάδες εξυπηρέτησης, και εξυπηρετούνται σε χρόνους, που κατανέμονται κι αυτοί εκθετικά με παράμετρο μ. Η διαδικασία του αριθμού $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ των εξυπηρετούμενων πελατών σχηματίζει πάλι μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου στο χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, \ldots\}$, η οποία είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με τους παρακάτω ρυθμούς:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda\,, \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \ldots\,, \\ \mu_n &= \min\{n\mu, s\mu\} = \begin{cases} n\mu, & \text{αν } 0 \leq n \leq s, \\ s\mu, & \text{αν } n \geq s. \end{cases} \end{aligned}$$

Όπως προηγούμενα, παίρνουμε τώρα το παρακάτω αποτέλεσμα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $Q(t)$, καθώς $t \to \infty$.

Θεώρημα 3.31. *Έστω $\rho = \lambda/(s\mu)$ η ένταση της κυκλοφορίας της ουράς $M/M/s$.*

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η μοναδική στάσιμη κατανομή της Q είναι η $\pi = (\pi_n\colon n \geq 0)$, $\pi_n = \lim_{t\to\infty} P(Q(t) = n)$, για $n \geq 0$, με:

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{(s\rho)^n}{n!}\,\pi_0, & \text{αν } \ n \leq s, \\ \\ \dfrac{(\rho)^n s^s}{s!}\,\pi_0,, & \text{αν } \ n \geq s, \end{cases}$$

όπου

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \left(\frac{(s\rho)^s}{s!}\right)\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right]^{-1}.$$

(ii) Αν $\rho \geq 1$, τότε δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή της Q και $\lim_{t\to\infty} P(Q(t) = n) = 0$, για όλα τα $n \geq 0$.

Από τους προηγούμενους τύπους, μπορούμε να εξάγουμε την πιθανότητα $P(\text{queueing})$ να μπει ένας πελάτης στην ουρά αναμονής (επειδή όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης του συστήματος είναι κατειλημμένες):

$$\begin{aligned} P(\text{queueing}) &= \sum_{n=s}^{\infty} \pi_n = \\ &= \frac{\left(\frac{(s\rho)^s}{s!}\right)\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}{\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \left(\frac{(s\rho)^s}{s!}\right)\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right]}. \end{aligned}$$

Η προηγούμενη έκφραση για την πιθανότητα $P(\text{queueing})$ να μπει ένας πελάτης στην ουρά αναμονής ονομάζεται *τύπος C του Erlang* και συχνά συμβολίζεται ως $C(s, \rho)$, για $\rho = \lambda/\mu$.

Ερχόμαστε τώρα στην ουρά $M(\lambda)/M(\mu)/\infty$. Η περίπτωση αυτή μπορεί εύκολα να αναλυθεί όπως προηγουμένως, παρατηρώντας ότι τώρα οι ρυθμοί της αντίστοιχης διαδικασίας γέννησης-θανάτου είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda\,, \qquad \text{για } n = 0, 1, 2, \ldots\,, \\ \mu_n &= n\mu\,, \qquad \text{για } n = 1, 2, 3, \ldots\,. \end{aligned}$$

Όπως προηγούμενα, παίρνουμε τώρα το παρακάτω αποτέλεσμα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $Q(t)$, καθώς $t \to \infty$.

Θεώρημα 3.32. *Έστω $\rho = \lambda/\mu < \infty$ η ένταση της κυκλοφορίας της ουράς $M/M/\infty$. Τότε η μοναδική στάσιμη κατανομή της Q είναι η $\pi = (\pi_n\colon n \geq 0)$, $\pi_n = \lim_{t\to\infty} P(Q(t) = n)$, για $n \geq 0$, με:*

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!}\, e^{-\rho}, \quad \text{για } \ n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

3.7. Ουρές $M/M/s/s$ με Απώλειες

Στην ουρά $M(\lambda)/M(\mu)/s/s$, λειτουργούν πάλι s μονάδες εξυπηρέτησης αλλά και η χωρητικότητα του συστήματος είναι ακριβώς s πελάτες. Αυτό σημαίνει ότι, όταν όλες οι s μονάδες εξυπηρέτησης του συστήματος είναι κατειλημμένες (δηλαδή, όταν υπάρχουν s πελάτες στο σύστημα), τότε υποχρεωτικά φεύγουν (χάνονται) όσοι τυχόν πελάτες έρθουν, πριν αδειάσει κάποιος εξυπηρετητής. Η περίπτωση αυτή μπορεί εύκολα να αναλυθεί όπως προηγουμένως, παρατηρώντας ότι τώρα οι ρυθμοί της αντίστοιχης διαδικασίας γέννησης-θανάτου είναι:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{αν } 0 \leq n < s, \\ 0, & \text{αν } n \geq s, \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{αν } 1 \leq n \leq s, \\ 0, & \text{αν } n > s. \end{cases}$$

Επομένως, τώρα η διαδικασία του αριθμού $Q = \{Q(t)\colon t \geq 0\}$ των εξυπηρετούμενων πελατών σχηματίζει μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου στον πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\{0, 1, \ldots, s\}$. Όπως προηγούμενα, παίρνουμε τώρα το παρακάτω αποτέλεσμα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $Q(t)$, καθώς $t \to \infty$.

Θεώρημα 3.33. *Έστω $\rho = \lambda/\mu < \infty$ η ένταση της κυκλοφορίας της ουράς $M/M/s/s$. Τότε η μοναδική στάσιμη κατανομή της Q είναι η $\pi = (\pi_n\colon n \geq 0)$, $\pi_n = \lim_{t\to\infty} P(Q(t) = n)$, για $n \geq 0$, με:*

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}\,\pi_0, & \text{για } 0 \leq n \leq s, \\[2ex] 0, & \text{για } n > s. \end{cases}$$

όπου

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}.$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το κλάσμα του χρόνου, στο οποίο όλοι οι s εξυπηρετητές του συστήματος είναι κατειλημμένοι. Το κλάσμα αυτό δίνεται από την πιθανότητα π_s, η οποία είναι:

$$\pi_s = \frac{\dfrac{\rho^s}{s!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}}.$$

Αυτή η έκφραση ονομάζεται *τύπος B των απωλειών του Erlang* και συχνά συμβολίζεται ως $B(s, \rho)$, για $\rho = \lambda/\mu$.

3.8. Ουρές $M/G/1$

Στην ουρά $M(\lambda)/G/1$, οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson έντασης λ. Έστω D_n ο χρόνος αναχώρησης (από τον εξυπηρετητή) του n-οστού πελάτη (εννοείται, φυσικά, αφού αυτός εξυπηρετηθεί) και έστω $Q(D_n)$ ο αριθμός των πελατών, που αυτός αφήνει πίσω του στην ουρά αμέσως μετά την αναχώρησή του.

Θεώρημα 3.34. *Η διαδικασία $Q(D) = \{Q(D_n)\colon n \geq 1\}$ είναι μια αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων:*

$$
P_D = \begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \dots \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \dots \\ 0 & \delta_0 & \delta_1 & \dots \\ 0 & 0 & \delta_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},
$$

όπου

$$
\delta_j = E\bigg(\frac{(\lambda S)^j}{j\,!}\, e^{-\lambda S} \bigg)
$$

και S είναι ένας τυπικός χρόνος εξυπηρέτησης.

Θεώρημα 3.35. *Έστω $\rho = \lambda E(S)$ η ένταση της κυκλοφορίας της ουράς $M/G/1$.*

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η αλυσίδα $Q(D)$ είναι εργοδική και έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή π με γεννήτρια συνάρτηση

$$
G(s) = \sum_j \pi_j s^j = (1-\rho)(s-1)\frac{M_S(\lambda(s-1))}{s - M_S(\lambda(s-1))},
$$

όπου M_S είναι η ροπο-γεννήτρια συνάρτηση ενός τυπικού χρόνου εξυπηρέτησης.

(ii) Αν $\rho > 1$, τότε η $Q(D)$ είναι παροδική.

(iii) Αν $\rho = 1$, τότε η $Q(D)$ είναι μηδενικά επαναφερόμενη.

Θεώρημα 3.36. *Όταν $\rho < 1$ και η ουρά $M/G/1$ βρίσκεται σε ισορροπία (δηλαδή, έχει κατανομή π), ο χρόνος αναμονής W των πελατών, πριν αυτοί αρχίσουν να εξυπηρετούνται, έχει τη ροπο-γεννήτρια συνάρτηση*

$$
M_W(s) = \frac{(1-\rho)s}{\lambda + s - \lambda M_S(s)}.
$$

3.9. Ουρές $G/M/1$

Στην ουρά $G/M(\mu)/1$, οι πελάτες εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson έντασης μ. Έστω $Q(A_n)$ ο αριθμός των πελατών, που βρίσκονται μπροστά από τον n-οστό πελάτη, τη στιγμή που μόλις αυτός εισέρχεται στον εξυπηρετητή.

Θεώρημα 3.37. *Η διαδικασία $Q(A) = \{Q(A_n) \colon n \geq 1\}$ είναι μια αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων:*

$$
P_A = \begin{pmatrix} 1-\alpha_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-\alpha_0-\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots \\ 1-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},
$$

όπου

$$
\alpha_j = E\bigg(\frac{(\mu X)^j}{j\,!}\, e^{-\mu X} \bigg)
$$

και X είναι ένα τυπικό χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων.

Θεώρημα 3.38. *Έστω* $\rho = \{\mu E(X)\}^{-1}$ *η ένταση της κυκλοφορίας της ουράς* $G/M/1$.

(i) *Αν* $\rho < 1$, *τότε η αλυσίδα* $Q(A)$ *είναι εργοδική και έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή* $\pi = (\pi_j : j \geq 0)$,

$$\pi_j = (1-\eta)\eta^j, \quad \text{για } j \geq 0,$$

όπου η *είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης* $\eta = M_X(\mu(\eta - 1))$ *και* M_X *είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της* X.

(ii) *Αν* $\rho > 1$, *τότε η* $Q(A)$ *είναι παροδική.*

(iii) *Αν* $\rho = 1$, *τότε η* $Q(A)$ *είναι μηδενικά επαναφερόμενη.*

Θεώρημα 3.39. *Όταν* $\rho < 1$ *και η ουρά* $G/M/1$ *βρίσκεται σε ισορροπία (δηλαδή, έχει κατανομή* π*), ο χρόνος αναμονής* W *των πελατών, πριν αυτοί αρχίσουν να εξυπηρετούνται, έχει την κατανομή*

$$P(W \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0, \\ 1 - \eta\, e^{-\mu(1-\eta)x}, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

3.10. Ουρές $G/G/1$

Οι ουρές $G/G/1$ αποτελούν τη γενική περίπτωση ουρών, στην οποίαν ούτε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων ούτε οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν κατανέμονται εκθετικά. Συμβολίζοντας με W_n το χρόνο αναμονής του n-οστού πελάτη, μπορεί να βρεθεί η παρακάτω σχέση μεταξύ του W_n και του W_{n+1} συναρτήσει του χρόνου εξυπηρέτησης S_n του n-οστού πελάτη και του χρονικού διαστήματος X_{n+1} μεταξύ της άφιξης του n-οστού και του $(n+1)$-οστού πελάτη.

Θεώρημα 3.40. (**Η εξίσωση του Lindley**.) *Ισχύει ότι*

$$W_{n+1} = \max\{0, W_n + S_n - X_{n+1}\}.$$

Η εξίσωση του Lindley συνεπάγεται τη σύγκλιση της ακολουθίας των συναρτήσεων κατανομής $F_n(x) = P(W_n \leq x)$ των χρόνων αναμονής W_n, καθώς $n \to \infty$, σύμφωνα με το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.41. *Έστω* $F_n(x) = P(W_n \leq x)$ *οι συναρτήσεις κατανομής των χρόνων αναμονής* W_n. *Τότε*

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} F_n(x-y)\, dG(y), & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$$

όπου G *είναι η συνάρτηση κατανομής των ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών* $U_n = S_n - X_{n+1}$. *Επομένως, υπάρχει το όριο* $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ *και ικανοποιεί την εξίσωση Wiener-Hopf*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} F(x-y)\, dG(y), \quad \text{για } x \geq 0.$$

Θεώρημα 3.42. *Έστω $\rho = E(S)/E(X)$ η ένταση μιας ουράς $G/G/1$ και έστω $F(x)$ μια λύση της εξίσωσης Wiener-Hopf.*

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η $F(x)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής.

(ii) Αν είτε $\rho > 1$ ή $\rho = 1$ και $\mathrm{var}(U) > 0$, τότε $F(x) = 0$, για όλα τα x.

3.11. Δίκτυα Ουρών

Είναι δυνατόν, όταν ένας πελάτης βγαίνει από μια ουρά, αμέσως μετά, να μπαίνει σε μια άλλη. Μάλιστα, αν αυτό συνεχισθεί, είναι δυνατόν ο πελάτης να θελήσει να ξαναμπεί σε μια ουρά, από την οποίαν είχε ήδη περάσει προηγουμένως. Έτσι, σχηματίζονται τα ονομαζόμενα "*δίκτυα ουρών*," με τη βοήθεια των οποίων μπορούν να μελετηθούν διαδικασίες διαδοχικών περασμάτων σε ουρές, που είναι εντελώς φυσικές σε πολλές πραγματικές καταστάσεις (π.χ., στην κυκλοφορία πακέτων δεδομένων, που διακινούνται μεταξύ διάφορων κόμβων ενός δικτύου υπολογιστών).

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο S αποτελούμενο από c σταθμούς εξυπηρέτησης, $s_1, s_2, \ldots, s_c$, από τους οποίους περνούν N πελάτες. Αν το χρόνο t η ουρά του σταθμού i περιλαμβάνει $Q_i(t)$ πελάτες, τότε οι πελάτες στο χρόνο t, οι οποίοι βρίσκονται στο συνολικό δίκτυο ουρών του συστήματος, αναπαρίστανται από το διάνυσμα $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_c(t))$. Χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι η διαδικασία Q είναι Μαρκοβιανή με αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων $\mathcal{N} = \{n = (n_1, n_2, \ldots, n_c)\colon n_i = 0, 1, 2, \ldots, \text{ για } 1 \leq i \leq c\}$.

Έστω $Q(t) = n \in \mathcal{N}$. Συμβολίζουμε με $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ το διάνυσμα σειράς με c συνιστώσες, όλες από τις οποίες είναι 0 εκτός από την k-οστή, που είναι 1. Τότε, για όλα τα $i \neq j$, έχουμε:

$$Q(t+h) = \begin{cases} n - e_i + e_j, & \text{με πιθανότητα } \lambda_{ij}\phi_i(n_i)h + o(h), \\ n + e_j, & \text{με πιθανότητα } \nu_j h + o(h), \\ n - e_i, & \text{με πιθανότητα } \mu_i \phi_i(n_i)h + o(h), \end{cases}$$

όπου $\lambda_{ij}, \nu_j, \mu_i$ είναι σταθερές και ϕ_i είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\phi_i(0) = 0$ και $\phi_i(n) > 0$, για $n \geq 1$. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι $\lambda_{ii} = 0$, για όλα τα i. Με άλλα λόγια, οι πελάτες κινούνται από το σταθμό εξυπηρέτησης i στο σταθμό j $(\neq i)$ με ρυθμό $\lambda_{ij}\phi_i(n_i)$, οι νέες άφιξεις στον j γίνονται με ρυθμό ν_j και οι πελάτες φεύγουν από τον i με ρυθμό $\mu_i\phi_i(n_i)$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι αναχωρήσεις από ένα σταθμό εξυπηρέτησης γίνονται με ρυθμούς, που εξαρτώνται από τον αριθμό των πελατών στο σταθμό αυτό.

Τα δίκτυα ουρών, που ορίζονται με τους προηγούμενους γενικούς κανόνες, συνήθως ονομάζονται *διαδικασίες διακινήσεων* ή *δίκτυα Jackson*. Επιπλέον, ένα τέτοιο δίκτυο ουρών λέγεται ότι αποτελεί μια *κλειστή διαδικασία διακινήσεων*, όταν $\nu_j = \mu_j = 0$, για όλα τα j, διότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να γινεί καμία άφιξη από ή αναχώρηση προς τον εξωτερικό κόσμο. Όταν κάποια από τα ν_j ή μ_j είναι θετικά, τότε το δίκτυο ουρών λέγεται ότι αποτελεί μια *ανοικτή διαδικασία διακινήσεων*.

Παρατήρηση 3.8. Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε σταθμό i υπάρχουν r εξυπηρετητές και ότι οι πελάτες στο σταθμό αυτό εξυπηρετούνται σύμφωνα με την εκθετική κατανομή με παράμετρο γ_i. Φεύγοντας από το σταθμό i, οι πελάτες κατευθύνονται προς το σταθμό j $(\neq i)$ με πιθανότητα p_{ij} ή βγαίνουν εξ ολοκλήρου εκτός του συνολικού δικτύου των σταθμών με πιθανότητα $q_i = 1 - \sum_{j\colon j \neq i} p_{ij}$. Αν υποτεθεί η σύνηθης ανεξαρτησία στο σύστημα, τότε η αντίστοιχη διαδικασία διακινήσεων έχει παραμέτρους $\phi_i = \min\{n, r\}, \lambda_{ij} = \gamma_i p_{ij}, \mu_i = \gamma_i q_i, \nu_j = 0$.

Ερχόμαστε τώρα να διερευνήσουμε τη στάσιμη κατανομή μιας κλειστής διαδικασίας διακινήσεων. Έτσι, υποθέτουμε εδώ ότι $\nu_j = \mu_j = 0$, για όλα τα j, και συμβολίζουμε με N το συνολικό πλήθος των πελατών, που βρίσκονται σε ολόκληρο το δίκτυο ουρών.

Πρώτα, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $N = 1$ και, χάριν απλότητας, θα υποθέσουμε ότι $\phi_i = 1$, για κάθε i. Όταν τώρα ο μοναδικός πελάτης βγεί από το σταθμό i, θα κατευθυνθεί στον j με ρυθμό λ_{ij}. Επομένως, η θέση του πελάτη αυτού είναι μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου με γεννήτορα $H = \{H_{ij}\}$, που δίνεται ως εξής:

$$H_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{αν } i \neq j, \\ -\displaystyle\sum_k \lambda_{ik}, & \text{αν } i = j. \end{cases}$$

Η αλυσίδα H έχει στάσιμη κατανομή $\alpha = (\alpha_i : i \in S)$, που ικανοποιεί τη σχέση $aH = 0$, δηλαδή, τις εξισώσεις:

$$\sum_j \alpha_j \lambda_{ji} = \alpha_i \sum_j \lambda_{ij}, \quad \text{για } i \in S,$$

εξισώσεις που θα υποθέτουμε στη συνέχεια ότι ικανοποιούνται από τις συνιστώσες του α. Επιπλέον, υποθέτοντας ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θα έχουμε $\alpha_i > 0$, για κάθε i (ενώ πάντα ισχύει η κανονικοποίηση $\sum_i \alpha_i = 1$).

Συμβολίζοντας με $\mathcal{N}_N$ τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{N}$ με άθροισμα των συνιστωσών τους ίσο προς N και θεωρώντας τα άδεια γινόμενα να είναι ίσα προς 1, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα για τη στάσιμη κατανομή αυτής της διαδικασίας.

Θεώρημα 3.43. *Η στάσιμη κατανομή μιας αδιαχώριστης κλειστής διαδικασίας διακινήσεων N πελατών είναι*

$$\pi(n) = B_N \prod_{i=1}^{c} \left\{ \frac{\alpha_i^{n_i}}{\prod_{r=1}^{n_i} \phi_i(r)} \right\}, \quad \text{για } n \in \mathcal{N}_N,$$

όπου B_N είναι μια κατάλληλη σταθερά για την κανονικοποίηση των συνιστωσών της π.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση, στην οποία οι πελάτες μπορούν να μπαίνουν και να βγαίνουν από το συνολικό δίκτυο ουρών. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση της κλειστής διαδικασίας διακινήσεων, χρειάζεται να δούμε πρώτα τι γίνεται με μια βοηθητική διαδικασία, στην οποία συμμετέχει μόνον ένας πελάτης. Τώρα, δίπλα στους c σταθμούς εξυπηρέτησης, προσθέτουμε έναν ακόμη, που τον συμβολίζουμε με ∞, οπότε παίρνουμε μια κλειστή διαδικασία διακινήσεων στο σύνολο σταθμών $S \cup \{\infty\}$. Στη διαδικασία αυτή, ο μοναδικός πελάτης, μετά από το σταθμό i, κατευθύνεται στο σταθμό j $(\neq i)$ με ρυθμό:

$$\begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{αν } 1 \leq i, j \leq c, \\ \mu_i, & \text{αν } j = \infty, \\ \nu_j, & \text{αν } i = \infty. \end{cases}$$

Υποθέτοντας ότι η βοηθητική αυτή διαδικασία είναι αδιαχώριστη, έστω J ο γεννητόρας της και $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_c, \beta_\infty)$ η μοναδική στάσιμη κατανομή της, που ικανοποιεί τη σχέση $\beta J = 0$, δηλαδή, τις εξισώσεις:

$$\beta_\infty \nu_i + \sum_{j\in S} \beta_j \lambda_{ji} = \beta_i \biggl(\mu_i + \sum_{j\in S} \lambda_{ij} \biggr), \quad \text{για } i \in S.$$

Παρατηρούμε ότι $\beta_i > 0$, για $i \in S \cup \{\infty\}$. Θέτοντας $\alpha_i = \beta_i/\beta_\infty$, παίρνουμε ένα διάνυσμα $\alpha = (\alpha_i : i \in S)$ τέτοιο ώστε $\alpha_i > 0$, για $i \in S$, και

$$\nu_i + \sum_{j\in S} \alpha_j \lambda_{ji} = \alpha_i \biggl(\mu_i + \sum_{j\in S} \lambda_{ij} \biggr), \quad \text{για } i \in S.$$

Έστω

$$D_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^n}{\prod_{r=1}^{n} \phi_j(r)}.$$

Θεώρημα 3.44. *Αν η παραπάνω βοηθητική διαδικασία είναι αδιαχώριστη και $D_i < \infty$, για κάθε $i \in S$, τότε η στάσιμη κατανομή της αρχικής ανοικτής διαδικασίας διακινήσεων είναι*

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^{c} \pi_i(n_i), \quad \textit{για } n \in \mathcal{N},$$

όπου

$$\pi_i(n_i) = D_i^{-1} \frac{\alpha_i^{n_i}}{\prod_{r=1}^{n_i} \phi_i(r)}.$$

4. Εισαγωγή στη Διάχυση

4.1. Στάσιμες Διαδικασίες

Ορισμός 4.36. Έστω $X = \{X(t)\}_{t \in T}$ μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου (με $T = [0, \infty)$ ή $T = \mathbb{R}$), η οποία παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$.

(i) Η X ονομάζεται *ισχυρώς στάσιμη*, αν, για κάθε $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ και $h > 0$, οι δυο οικογένειες τυχαίων μεταβλητών

$$\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\} \quad \text{και} \quad \{X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_n + h)\}$$

έχουν την ίδια κοινή συνάρτηση κατανομής.

(ii) Η X ονομάζεται *ασθενώς στάσιμη*, αν, για κάθε $t_1, t_2 \in T$ και $h > 0$,

$$E(X(t_1)) = E(X(t_2)) \quad \text{και} \quad \operatorname{cov}(X(t_1), X(t_2)) = \operatorname{cov}(X(t_1 + h), X(t_2 + h)).$$

Προφανώς, μια στοχαστική διαδικασία είναι ισχυρώς στάσιμη αν και μόνον αν έχει την ίδια κατανομή για κάθε χρόνο. Σε ό,τι ακολουθεί, μας ενδιαφέρει κυρίως η ασθενής στασιμότητα και θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες. Πάντως, γενικώς, κάθε ισχυρώς στάσιμη διαδικασία δεν είναι και ασθενώς στάσιμη, ούτε και το αντίθετο ισχύει πάντα.

Ορισμός 4.37. Έστω η στοχαστική διαδικασία $X = \{X(t)\}_{t \in T}$.

- Η *συνάρτηση της αυτοσυνδιασποράς* $c\colon T \times T \to \mathbb{R}$ της X ορίζεται ως

$$c(s, s + t) = \operatorname{cov}(X(s), X(s + t)), \quad \text{για όλα τα } s, t \in T.$$

- Η *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης* $\rho\colon T \times T \to \mathbb{R}$ της X ορίζεται ως

$$\rho(s, s + t) = \frac{\operatorname{cov}(X(s), X(s + t))}{\sqrt{\operatorname{var}(X(s)) \operatorname{var}(X(s + t)}}, \quad \text{για όλα τα } s, t \in T.$$

Παρατήρηση 4.9. Ας παρατηρήσουμε ότι η X είναι ασθενώς στάσιμη αν και μόνον αν η μέση τιμή της διατηρείται σταθερή στο χρόνο και η συνάρτηση της αυτοσυνδιασποράς της είναι

$$c(s, s + t) = c(0, t) = \operatorname{cov}(X(0), X(t)), \quad \text{για όλα τα } s, t \in T.$$

Επειδή τότε η $c(s, s+t)$ είναι ανεξάρτητη του s, η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς μιας ασθενώς στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας γράφεται σε συντομία ως

$$c(t) = c(s, s + t), \quad \text{για κάθε } s \in T,$$

και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως

$$\rho(t) = \rho(s, s + t), \quad \text{για κάθε } s \in T.$$

Έτσι, έχουμε για τη μεταβλητότητα μιας ασθενώς στάσιμης διαδικασίας X

$$\operatorname{var}(X(t)) = \operatorname{cov}(X(t), X(t)) = c(0)$$

και για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της X

$$\rho(t) = \frac{c(t)}{c(0)},$$

εφόσον $c(0) = \operatorname{var}(X(t)) > 0$.

Πρόταση 4.20. *Αν η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ασθενώς στάσιμη, τότε*

(i) $c(-t) = c(t)$, *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$, *και*

(ii) η c *είναι μια μη αρνητικά ορισμένη συνάρτηση, με την έννοια ότι για κάθε* $t_1, t_2, \dots t_n \in \mathbb{R}$ *και* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k c(t_j - t_k) \geq 0.$$

Ορισμός 4.38. Έστω η στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $X = \{X(t)\}_{t\in T}$ με $T = [0,\infty)$ ή $T = \mathbb{R}$, η οποία παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Η X ονομάζεται *διαδικασία Gauss*, αν, για κάθε $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, το διάνυσμα $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή $N(\mu(t), V(t))$, για κάποιο διάνυσμα μέσων τιμών $\mu(t)$ και κάποιο πίνακα συνδιασποράς $V(t)$, που εξαρτώνται από το $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Πρόταση 4.21. *Έστω η στοχαστική διαδικασία Gauss* $X = \{X(t)\}_{t\in T}$, *όπου* $T = [0,\infty)$ *ή* $T = \mathbb{R}$. *Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Η X *είναι ισχυρώς στάσιμη.*

(ii) Η X *είναι ασθενώς στάσιμη.*

(iii) Η $E(X(t))$ *είναι σταθερή, για κάθε* $t \in T$, *και ο πίνακας συνδιασποράς* $V(t)$ *είναι τέτοιος ώστε* $V(t) = V(t+h)$, *για κάθε* $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$ *και* $h > 0$, *όπου* $t + h = (t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h)$.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν μια στοχαστική διαδικασία Gauss είναι και διαδικασία Markov. Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό, χρειάζεται να ορισθεί πρώτα η διαδικασία Markov συνεχούς χρόνου με τιμές στον $\mathbb{R}$. Αυτό γίνεται στον ορισμό που ακολουθεί.

Ορισμός 4.39. Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\in T}$, όπου $T = [0,\infty)$ ή $T = \mathbb{R}$, στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{R}$, λέγεται ότι είναι μια *στοχαστική διαδικασία Markov*, αν, για κάθε ακολουθία χρόνων $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ με $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ και για κάθε $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$, ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov:

$$P(X_{t_n} \leq x \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_n} \leq x \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}).$$

Θεώρημα 4.45. *Η η στοχαστική διαδικασία Gauss* $X = \{X(t)\}_{t\in T}$, *όπου* $T = [0,\infty)$ *ή* $T = \mathbb{R}$, *είναι μια στοχαστική διαδικασία Markov αν και μόνον αν, για κάθε ακολουθία χρόνων* $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ *με* $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ *και για κάθε* $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$, *ισχύει η παρακάτω σχέση*

$$E(X_{t_n} \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1) = E(X_{t_n} \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}).$$

4.2. Διαδικασίες Wiener και Διάχυση

Σε πολλά φαινόμενα, τα οποία εξελίσσονται χωρο-χρονικά ή απλώς χρονικά, αλλά εξαρτώνται από μια πληθώρα παραγόντων, μπορεί να διαπιστωθεί μια ενδιαφέρουσα αντίθεση αναφορικά με την "κίνηση" των συστατικών στοιχείων των συστημάτων αυτών. Συνήθως, σε ένα φυσικό φαινόμενο, αυτά τα συστατικά στοιχεία δεν είναι παρά τα μικροσκοπικά σωματιδεία, που συγκροτούν την ύλη, που εμπλέκεται στο φαινόμενο. Παρότι, γενικώς, σε φυσικά και μη φυσικά συστήματα, η έννοια των συστατικών τους στοιχείων μπορεί να ποικίλει, χάριν απλότητας, ας θεωρήσουμε ότι αυτά είναι κάποια "σωματίδεια."

Τότε, η συχνά παρατηρούμενη αντίθεση αυτή είναι η εξής: ενώ στο μικροσκοπικό επίπεδο οι τροχιές των σωματιδείων είναι τυχαίες και άτακτες, τα μορφώματα, που παρατηρούνται μακροσκοπικά για την πυκνότητα του συνόλου των σωματιδείων, έχουν μια πολύ ομαλή συμπεριφορά στις χωρο-χρονικές τους μεταβολές. Για παράδειγμα, αυτή η διαπίστωση παρατηρείται στα φαινόμενα *διάχυσης* ενός μέσου μέσα σε ένα άλλο μέσο.

Επιπλέον, πέρα από τα διαχεόμενα σωματίδεια, κάποιο ανάλογο πέρασμα από το τυχαίο στο κανονικό παρατηρείται σε διάφορα συστήματα με θόρυβο, όπως, για παράδειγμα, στην περίπτωση των χρονικών διακυμάνσεων των τιμών των μετοχών στο χρηματιστήριο. Αν ο θόρυβος σε ένα τέτοιο σύστημα προέρχεται από ένα πλήθος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβολών, τότε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα προβλέπει ότι η γενική συνισταμένη όλων αυτών των μεταβολών θα ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Επομένως, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε αυτήν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των φαινομένων της διάχυσης ή των συστημάτων με θόρυβο, μια ιδιότητα που συχνά μελετάται μέσω της "*κίνησης Brown*," που ακολουθούν τα "σωματίδεια," που συγκροτούν αυτά τα συστήματα. Με άλλα λόγια, σαν κίνηση Brown περιγράφεται το παρατηρούμενο πέρασμα από μια άτακτη (εσωτερική) στοχαστικότητα στην κίνηση των συστατικών σωματιδείων του συστήματος σε κάποια ομαλή ανάπτυξη (εξωτερικών) μορφωμάτων για τους συνολικούς σχηματισμούς του συστήματος. Στο πλαίσιο της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών, η μοντελοποίηση της κίνησης Brown γίνεται με τις ονομαζόμενες *διαδικασίες Wiener*, που ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 4.40. Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $W = \{W(t)\}_{t\geq 0}$, που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται *διαδικασία Wiener* (ή μερικές φορές και *κίνηση Brown*), αν η W ξεκινά με $W(0) = w$, *σ.σ.*, και είναι τέτοια ώστε:

(i) Τα *δειγματικά μονοπάτια* (*sample paths*) $t \mapsto W(t)(\omega)$ είναι συνεχή, *σ.σ.*, για $\omega \in \Omega$.

(ii) Η W έχει *ανεξάρτητες απειροστές αυξήσεις* (*independent increments*), με την έννοια ότι, για κάθε $0 \leq s_1 \leq t_1 < s_2 \leq t_2 < \ldots < s_n \leq t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $\{W(t_j) - W(s_j) \colon j = 1, 2, \ldots, n\}$ είναι ανεξάρτητες.

(iii) Για κάθε $0 \leq s < t$, η τυχαία μεταβλητή $W(t) - W(s)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2(t-s))$, για κάποια σταθερά $\sigma^2 > 0$.

Παρατήρηση 4.10. Μπορούν να αποδειχθούν τα παρακάτω, για τη διαδικασία Wiener $W = \{W(t)\}_{t\geq 0}$:

- Η μέση τιμή της $W(t)$ είναι $E(W(t)) = 0$, για κάθε $t \geq 0$.
- Η συνάρτηση της αυτοσυνδιασποράς της $W(t)$ είναι $c(s,t) = \operatorname{cov}(W(s), W(t)) = \sigma^2 \min\{t, s\}$, για κάθε $t, s \geq 0$.
- Άρα, η διασπορά της $W(t)$ είναι $\operatorname{var}(W(t)) = \operatorname{cov}(W(t), W(t)) = \sigma^2 t$, για κάθε $t \geq 0$.
- Για κάθε $t \geq 0$, η $W(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2 t)$, δηλαδή, έχει συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right], \quad \text{για} \quad -\infty < x < \infty.$$

- Επομένως, κάθε διαδικασία Wiener W είναι διαδικασία Gauss, με την έννοια ότι, για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$, το διάνυσμα $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))$ ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή $N(\mu(t), V(t))$ με διάνυσμα μέσων τιμών $\mu(t) = 0$ και πίνακα συνδιασποράς $V_{ij}(t) = \sigma^2 \min\{t_i, t_j\}$, για $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Ορισμός 4.41. Μια διαδικασία Wiener ονομάζεται *τυποποιημένη* (*standard*), αν $\sigma^2 = 1$ και $W(0) = 0$.

Προφανώς, αν η W είναι μη τυποποιημένη, τότε η $W_1(t) = (W(t) - W(0))/\sigma$ είναι τυποποιημένη. Επιπλέον, σύμφωνα με ένα προηγούμενο αποτέλεσμα, κάθε διαδικασία Wiener είναι και διαδικασία Markov.

Θεώρημα 4.46. *Κάθε διαδικασία Wiener $W(t)$ είναι μια μη διαφορίσιμη συνάρτηση του t, σ.σ., για $t \geq 0$.*

Θεώρημα 4.47. *Έστω η τυποποιημένη διαδικασία Wiener $W(t)$ και έστω $f(t, y \,|\, s, x)$ η συνάρτηση υπο συνθήκης πυκνότητας της $W(t)$, όταν $W(s) = x$ και $t \geq s \geq 0$. Τότε:*

$$f(t, y \,|\, s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\!\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right), \quad \textit{για} \quad -\infty < y < \infty.$$

Επιπλέον, η $f = f(t, y \,|\, s, x)$ ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, && \textit{η προς τα εμπρός εξίσωση της διάχυσης,} \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, && \textit{η προς τα πίσω εξίσωση της διάχυσης.} \end{aligned}$$

Ορισμός 4.42. Μια *διαδικασία διάχυσης* $D = D(t)$ είναι μια διαδικασία Wiener, για την οποίαν, επιπλέον, υπάρχουν δυο συναρτήσεις, η $a(t, x)$, που ονομάζεται *στιγμιαία μέση τιμή* της D, και η $b(t, x)$, που ονομάζεται *στιγμιαία μεταβλητότητα* της D, τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} E(D(t+h) - D(t) \,|\, D(t) = x) &= a(t, x)h + o(h), \\ E([D(t+h) - D(t)]^2 \,|\, D(t) = x) &= b(t, x)h + o(h). \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.48. *Έστω η διαδικασία διάχυσης $D(t)$ και έστω $f(t, y \,|\, s, x)$ η συνάρτηση υπο συνθήκης πυκνότητας της $D(t)$, όταν $D(s) = x$ και $t \geq s \geq 0$. Αν ισχύουν κάποιες ακόμη τεχνικές συνθήκες (δείτε Feller [6], σελ. 332-335), τότε:*

$$f(t, y \,|\, s, x) = \frac{\partial}{\partial y} P(D(t) \leq y \,|\, D(s) = x).$$

Επιπλέον, η $f = f(t, y \,|\, s, x)$ ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y}[a(t, y)f] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(t, y)f], && \textit{η προς τα εμπρός εξίσωση της γενικής διάχυσης,} \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= -a(s, x)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}b(s, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, && \textit{η προς τα πίσω εξίσωση της γενικής διάχυσης.} \end{aligned}$$

5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ανασκόπηση Θεωρίας Πιθανοτήτων

5.1. Πιθανότητες

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Το σύνολο Ω θα ονομάζεται *δειγματοχώρος* και οποιοδήποτε υποσύνολό του $A \subset \Omega$ θα ονομάζεται *γεγονός*. Ειδικότερα, το $\varnothing$ ονομάζεται *απίθανο γεγονός* και όλο το Ω ονομάζεται *βέβαιο γεγονός*.

Ορισμός 5.43. Μια (μη κενή) συλλογή $\mathcal{F}$ γεγονότων (υποσυνόλων του Ω) λέγεται ότι αποτελεί ένα *σ-πεδίο* (ή, αλλιώς, μια *σ-άλγεβρα*) στο Ω, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε και $A^c \in \mathcal{F}$, όπου A^c συμβολίζει το *συμπλήρωμα* του A, δηλαδή, $A^c = \{s \in \Omega\colon s \notin A\}$.
- Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, τότε και $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Προφανώς, από τις δυο πρώτες σχέσεις έπεται ότι και $\varnothing \in \mathcal{F}$. Επιπλέον, από τους νόμους του De Morgan, πέρα από τις ενώσεις, η τρίτη σχέση ισχύει και για τις τομές. Ακόμη, ας προσθέσουμε ότι τα $A \in \mathcal{F}$ συχνά ονομάζονται *μετρήσιμα γεγονότα*.

Μπορεί να αποδειχθεί (δείτε Cohn [3], σελ. 3) ότι, δοθέντος οποιουδήποτε συνόλου Ω και οποιασδήποτε συλλογής $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω, υπάρχει πάντα ένα μικρότερο σ-πεδίο $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G})$, που περιέχει τη συλλογή $\mathcal{G}$. Έτσι, στην ειδική περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ή, γενικότερα, όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι ένας τοπολογικός χώρος), τότε υπάρχει το σ-πεδίο, που παράγεται από τη συλλογή των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, το οποίο συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και ονομάζεται *σ-πεδίο Borel*. Επιπλέον, τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, που ανήκουν στο σ-πεδίο Borel, ονομάζονται *σύνολα Borel*.

Ορισμός 5.44. Μια συνάρτηση $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ ονομάζεται *μέτρο πιθανότητας* στο Ω και λέμε ότι η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ αποτελεί ένα *χώρο πιθανότητας*, αν η μ ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{F}$ είναι ξένα γεγονότα (δηλαδή, $A \cap B = \varnothing$), τότε και $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Και γενικότερα, αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ είναι ανά δυο ξένα γεγονότα (δηλαδή, $A_i \cap Aj = \varnothing$, για κάθε $i \neq j$), τότε $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

Παρατηρήστε πως μαζί οι (i) και (ii) συνεπάγονται ότι $\mu(\Omega) = 1$. Με άλλα λόγια, όταν $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, ορίζεται η *πιθανότητα* $\mu(A) \in [0,1]$, για κάθε γεγονός $A \in \mathcal{F}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω σχέσεις. Συχνά, αντί για $\mu(A)$, θα συμβολίζουμε με $P(A)$ την πιθανότητα του γεγονότος $A \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 5.45. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $A \in \mathcal{F}$. Λέμε ότι το γεγονός A συμβαίνει "*σχεδόν σίγουρα*" ("*almost sure*") και συμβολίζουμε τον χαρακτηρισμό αυτό με "*σ.σ.*" ("*a.s.*"), αν ισχύει $P(A) = 1$.

Παράδειγμα 5.9. Ένα πρώτο και απλούστατο παράδειγμα πιθανότητας μπορεί να δοθεί για την περίπτωση ενός *διακριτού χώρου πιθανότητας*. Αυτή είναι η περίπτωση, που ο δειγματοχώρος Ω είναι αριθμήσιμος (είτε πεπερασμένος ή αριθμήσιμα άπειρος), οπότε η συλλογή όλων των υποσυνόλων του Ω σχηματίζει ένα σ-πεδίο $\mathcal{F}$. Τότε, για κάθε γεγονός $A \subset \Omega$, ορίζεται η πιθανότητα

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

όπου η συνάρτηση $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $p(\omega) \geq 0$, για κάθε $\omega \in \Omega$, και $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Παράδειγμα 5.10. Ένα δεύτερο παράδειγμα πιθανότητας μπορεί να δοθεί για την περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}$. Θεωρώντας τότε το σ-πεδίο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των συνόλων Borel στον $\mathbb{R}$, μπορεί να αποδειχθεί (δείτε Cohn [3], σελ. 14-24) ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας λ ορισμένο στο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, που ονομάζεται *μέτρο Lebesgue*, το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\lambda((a,b]) = b - a$, για κάθε $a < b$.

Ορισμός 5.46. Έστω A, B δυο μετρήσιμα γεγονότα (δηλαδή, $A, B \in \mathcal{F}$) και $P(B) > 0$. Μπορούμε να ορίσουμε την *υπό συνθήκη πιθανότητα του A δοθέντος του B*, που τη συμβολίζουμε με $P(A|B)$, ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Πρόταση 5.22. (**Ο Τύπος της Ολικής Πιθανότητας.**) *Για κάθε δυο γεγονότα $A, B \in \mathcal{F}$ με $0 < P(B) < 1$,*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

Γενικότερα, αν έχουμε ένα διαμερισμό του Ω στα ανά δυο ξένα σύνολα $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Ορισμός 5.47. Δυο μετρήσιμα γεγονότα A, B λέγεται ότι είναι *ανεξάρτητα*, αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Γενικότερα, μια πεπερασμένη συλλογή μετρησίμων γεγονότων $A_1, \ldots, A_k$ λέγεται ότι αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα, αν, για κάθε $m \leq k$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}$ με $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, έχουμε

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = \prod_{n=1}^{m} P(A_{i_n}).$$

Ακόμη πιο γενικώς, μια (αριθμήσιμα) άπειρη συλλογή μετρήσιμων γεγονότων λέγεται ότι αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα, αν τα γεγονότα κάθε πεπερασμένης υποσυλλογής της είναι ανεξάρτητα.

5.2. Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.48. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Μια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *τυχαία μεταβλητή*, αν, για κάθε $B \subset \mathbb{R}$, που είναι σύνολο Borel (δηλαδή, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), έχουμε

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Επομένως, όταν η συνάρτηση $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε επειδή, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το γεγονός $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq a\}$ είναι ένα σύνολο Borel, μπορεί να ορισθεί για το $\{X \leq a\}$ το μέτρο πιθανότητας του χώρου αυτού, δηλαδή, $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 5.11. Δοθέντος του μετρήσιμου γεγονότος A στο δειγματοχώρο Ω, η *χαρακτηριστική* (*ή δείκτρια*) *συνάρτηση* I_A του A είναι μια τυχαία μεταβλητή $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \omega \in A, \\ 0, & \text{όταν } \omega \notin A. \end{cases}$$

Ορισμός 5.49. Κάθε τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ δημιουργεί ένα μέτρο πιθανότητας $\mu = \mu_X$ στο $\mathbb{R}$, το οποίο ονομάζεται *κατανομή* της τυχαίας μεταβλητής X (στο $\mathbb{R}$) και ορίζεται ως

$$\mu_X(A) = P(X \in A),$$

για κάθε A σύνολο Borel (δηλαδή, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), όπου (πάλι) $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\}$.

Συνήθως, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \to \mathbb{R}$ περιγράφεται μέσω της ονομαζόμενης *συνάρτησης κατανομής* $F = F_X$ της X (στο $\mathbb{R}$), η οποία είναι η συνάρτηση $F_X\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, που ορίζεται ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \mu_X((-\infty, x]), \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 5.23. *Η συνάρτηση κατανομής F έχει τις εξής ιδιότητες:*

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
- *για κάθε $x < y$, $F(x) \leq F(y)$,*
- *η F είναι συνεχής από δεξιά, δηλαδή, $F(x + h) \to F(x)$, καθώς $h \downarrow 0$.*

Επιπλέον, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση κατανομής F ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

- $P(X > x) = 1 - F(x)$,
- $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$,
- $P(X = x) = F(x) - \lim_{y\uparrow x} F(y)$.

5.3. Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.50. Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ονομάζεται *διακριτή τυχαία μεταβλητή*, όταν το $X(\Omega)$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών, $X(\Omega) = \{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$, τέτοιο ώστε, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, να έχουμε $\{X = x_i\} \in \mathcal{F}$ (όπου πάλι $\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x_i\}$).

Άρα, όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι αριθμήσιμος, η τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ είναι διακριτή.

Παράδειγμα 5.12. Δοθέντος του μετρήσιμου γεγονότος A στο δειγματοχώρο Ω, η χαρακτηριστική συνάρτηση I_A είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 5.51. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, η οποία παίρνει τιμές στο αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών $X(\Omega) = \{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$ (όπου υποθέτουμε πως τα x_i είναι διακριτοί αριθμοί). Τότε η συνάρτηση $f = f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, που ορίζεται ως $f_X(x) = P(X = x)$, ονομάζεται *συνάρτηση μάζας* της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X.

Έτσι, για κάθε σύνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$, έχουμε

$$P(x \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i).$$

Οι συναρτήσεις κατανομής και μάζας F, f μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad f(x) = F(x) - \lim_{y \uparrow x} F(y).$$

Επομένως, η κατανομή μ_X της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X αναπαρίσταται από το *διάνυσμα πιθανότητας* $(\mu_i : i$ τέτοιο ώστε $x_i \in X(\Omega))$, όπου $\mu_i = f(x_i) = P(X = x_i)$, για κάθε i τέτοιο ώστε $x_i \in X(\Omega)$. Προφανώς, $\mu_i > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, και $\sum_{i:\, x_i \in X(\Omega)} \mu_i = 1$.

Παράδειγμα 5.13. *Η κατανομή Bernoulli*: Στην ειδικότερη περίπτωση της προηγουμένης, που η τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ παίρνει μόνο δυο τιμές, ας πούμε, $X(\Omega) = \{0, 1\}$, λέμε ότι έχουμε μια *δοκιμή Bernoulli* και ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την *κατανομή Bernoulli*. Τότε, η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ και η συνάρτηση μάζας $f(x) = P(X = x)$ δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0, \\ 1-p, & \text{όταν } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{όταν } x \geq 1, \end{cases} \\ f(0) &= 1-p, \quad f(1) = p, \end{aligned}$$

όπου $p = P(X = 1) > 0$ ονομάζεται *πιθανότητα επιτυχίας* της δοκιμής Bernoulli X (και $1 - p = P(X = 0)$).

Παράδειγμα 5.14. *Η διωνυμική κατανομή*: Έστω ότι έχουμε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli $X_1, \ldots, X_n$, η κάθε μια από τις οποίες έχει πιθανότητα επιτυχίας $p > 0$. Υποθέτουμε ότι οι δοκιμές αυτές είναι (μεταξύ τους) ανεξάρτητες με την έννοια ότι, για κάθε δυο $X_i, X_j, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$, τα γεγονότα $\{X_i = 0\}$ (ή $\{X_i = 1\}$) και $\{X_j = 0\}$ (ή $\{X_j = 1\}$) είναι (αντιστοίχως) ανεξάρτητα. Θεωρούμε, τότε, την τυχαία μεταβλητή $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Προφανώς, η Y είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, που παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, n\}$. Τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί τη *διωνυμική κατανομή* με παραμέτρους n και p, την οποία συνήθως συμβολίζουμε ως $\mathrm{bin}(n, p)$. Με έναν απλό υπολογισμό, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση μάζας της Y είναι

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 5.15. *Η κατανομή Poisson*: Η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, που παίρνει τιμές στο σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και έχει την εξής συνάρτηση μάζας

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

για κάποιο $\lambda > 0$, λέγεται ότι ακολουθεί την *κατανομή Poisson* με παράμετρο λ.

Ορισμός 5.52. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $(\mu_k : k$ τέτοιο ώστε $x_k \in X(\Omega))$ το διάνυσμα πιθανότητας της X. Η *μέση ή αναμενόμενη τιμή*

$E(X)$ της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k:\ x_k \in X(\Omega)} k\mu_k = \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xP(X=x), \end{aligned}$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Πρόταση 5.24. *Έστω $f(x)$ η συνάρτηση μάζας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X και έστω η απεικόνιση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε*

$$E(g(X)) = \sum_{x\in\mathbb{R}} g(x)f(x),$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Ορισμός 5.53. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή X και έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός k.

(i) Η *k-οστή ροπή* m_k και η *k-οστή κεντρική ροπή* σ_k της X ορίζονται αντιστοίχως ως:

$$\begin{aligned} m_k &= E(X^k) = \\ \sigma_k &= E((X-m_1)^k). \end{aligned}$$

(ii) Η *μεταβλητότητα* $\mathrm{var}(X)$ της X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) = \sigma_2 &= E((X-E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - (E(|X|))^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.16. Για την κατανομή Bernoulli, $E(X) = p$ και $\mathrm{var}(X) = p(1-p)$, για τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{bin}(n,p)$, $E(X) = np$ και $\mathrm{var}(X) = np(1-p)$, και, για την κατανομή Poisson, $E(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda$.

5.4. Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.54. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η X ονομάζεται *συνεχής τυχαία μεταβλητή*, αν η συνάρτηση κατανομής $F(x) = F_X(x) = P(X \leq x)$ είναι μια απολύτως συνεχής συνάρτηση, οπότε η F μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \ \ x \in \mathbb{R},$$

για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f = f_X\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, που ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας* της τυχαίας μεταβλητής X. Φυσικά, αν η $F(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x, τότε $f(x) = F'(x)$.

Έτσι, για κάθε σύνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$, έχουμε

$$P(x \in A) = \int_A f(x)\,dx.$$

Ορισμός 5.55. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της X. Η *μέση ή αναμενόμενη τιμή* $E(X)$ της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Πρόταση 5.25. *Έστω $f_X(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X και έστω η απεικόνιση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι τέτοια ώστε η $g(X)$ να είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Ορισμός 5.56. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X και έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός k.

(i) Η *k-οστή ροπή* m_k και η *k-οστή κεντρική ροπή* σ_k της X ορίζονται αντιστοίχως ως:

$$\begin{aligned} m_k &= E(X^k) = \\ \sigma_k &= E((X - m_1)^k). \end{aligned}$$

(ii) Η *μεταβλητότητα* $\mathrm{var}(X)$ της X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) = \sigma_2 &= E((X - E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - (E(|X|))^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.17. *Η ομοιόμορφη κατανομή*: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι *ομοιόμορφη* στο διάστημα $[a, b]$ ή ότι *κατανέμεται ομοιόρφα* στο διάστημα αυτό, αν η συνάρτηση κατανομής της είναι η εξής:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{για } a < x \le b, \\ 1, & \text{για } x > b. \end{cases}$$

Χοντρικά μπορούμε να πούμε ότι η ομοιόμορφη κατανομή παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ a και b με την ίδια πιθανότητα. Ακόμη, για την ομοιόμορφη κατανομή, $f(x) = (b-a)^{-1}, E(X) = (a+b)/2$ και $\mathrm{var}(X) = (b-a)^2/12$.

Παράδειγμα 5.18. *Η εκθετική κατανομή*: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι *εκθετική* με παράμετρο λ (> 0) ή ότι *κατανέμεται εκθετικά* με την παράμετρο αυτή, αν η συνάρτηση κατανομής της είναι η εξής:

$$F(x) = 1 - e^{\lambda x}, \quad \text{για } \; x \ge 0.$$

Για την εκθετική κατανομή, $f(x) = \lambda\, e^{\lambda x}, E(X) = 1/\lambda$ και $\mathrm{var}(X) = 1/\lambda^2$.

Παράδειγμα 5.19. *Η κανονική κατανομή*: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι *κανονική* με παράμετρους μ και σ^2 ή ότι η X *ακολουθεί την κανονική κατανομή ή κατανομή του Gauss* με τις παραμέτρους αυτές, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι η εξής:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\biggl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\biggr), \quad \text{για } \; -\infty < x < \infty.$$

Αυτή η κανονική κατανομή συμβολίζεται με $N(\mu, \sigma^2)$ και έχει $E(X) = \mu$ και $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$.

5.5. Εξάρτηση Τυχαίων Μεταβλητών και Υπό Συνθήκη Κατανομές

Ορισμός 5.57. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και δύο τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Οι X_1 και X_2 λέγονται ανεξάρτητες, αν, για κάθε δυο σύνολα Borel $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, τα γεγονότα $\{X_1 \in B_1\}$ και $\{X_2 \in B_2\}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι, για κάθε δυο τιμές $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

- τα γεγονότα $\{X_1 = x_1\}$ και $\{X_2 = x_2\}$ είναι ανεξάρτητα, όταν οι δυο τυχαίες μεταβλητές είναι διακριτές,
- τα γεγονότα $\{X_1 \leq x_1\}$ και $\{X_2 \leq x_2\}$ είναι ανεξάρτητα, όταν οι δυο τυχαίες μεταβλητές είναι συνεχείς.

Όπως και στην περίπτωση της ανεξαρτησίας των γεγονότων, ο ορισμός αυτός μπορεί αμέσως να γενικευθεί για οποιαδήποτε αριθμήσιμη συλλογή τυχαίων μεταβλητών.

Υπάρχει κι ένας έμμεσος τρόπος να μελετηθεί η ανεξαρτησία δυο τυχαίων μεταβλητών κι αυτός γίνεται μέσω της κοινής τους κατανομής, όπως εισάγεται στη συνέχεια.

Ορισμός 5.58. Δοθέντων δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, η *συνάρτηση κοινής κατανομής* τους $F_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ορίζεται ως:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, αν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση κοινής μάζας* τους $f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ως:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y), \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R},$$

ενώ, αν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση κοινής πυκνότητάς* τους $f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ ως μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{v=-\infty}^{y} \int_{u=-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv, \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς, αν η $F_{X,Y}$ είναι αρκετά διαφορίσιμη, τότε $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$.

Πρόταση 5.26. *Οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνον αν*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y),$$

όπου $f_X(x), f_Y(y)$ είναι οι συναρτήσεις μάζας των X, Y (αντιστοίχως), όταν οι μεταβλητές αυτές είναι διακριτές, ή οι συναρτήσεις πυκνότητας, όταν είναι συνεχείς (εφόσον, βέβαια, υπάρχουν οι $f_{X,Y}(x,y), f_X(x), f_Y(y)$ στη συνεχή περίπτωση).

Παράδειγμα 5.20. *Η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή*: Έστω $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ μια πεπερασμένη ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Λέμε ότι η X ακολουθεί την *πολυμεταβλητή κανονική κατανομή* $N(\mu, V)$, αν έχει κοινή συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |V|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)V^{-1}(x-\mu)^T \right], \quad \text{για } \ x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου το *διάνυσμα των μέσων τιμών* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ έχει σταθερές συνιστώσες και ο *πίνακας της συνδιασποράς* V είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας $n \times n$ (με ορίζουσα $|V|$).

Πρόταση 5.27. *Έστω οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y και η απεικόνιση $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε και η $g(X,Y)$ να είναι τυχαία μεταβλητή. Τότε:*

- *όταν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κοινής μάζας $f_{X,Y}$,*

$$E(g(X,Y)) = \sum_{x,y \in \mathbb{R}} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y),$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συκλίνει απολύτως, και

- *όταν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κοινής πυκνότητας $f_{X,Y}$,*

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Ορισμός 5.59. Έστω X, Y δυο τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές $E(X), E(Y)$ και μεταβλητότες $\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y)$ (αντιστοίχως).

(i) Η *συνδιασπορά* (*covariance*) των X και Y, που συμβολίζεται με $\mathrm{cov}(X,Y)$, ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) = \\ &= E(XY) - E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Προφανώς, $\mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X)$.

(ii) Ο *συντελεστής συσχέτισης* (ή, απλώς, η *συσχέτιση*) των X και Y, που συμβολίζεται με $\rho(X,Y)$, ορίζεται ως:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)}},$$

εφόσον οι μεταβλητότες των δυο τυχαίων μεταβλητών δεν είναι μηδενικές. Στην περίπτωση $Y = X$, το $\rho(X,X)$ ονομάζεται *συντελεστής αυτοσυσχέτισης* της X.

(iii) Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ονομάζονται *ασυσχέτιστες*, αν $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ (ή $\rho(X,Y) = 0$).

Πρόταση 5.28. *Αν οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε αυτές είναι και ασυσχέτιστες. Αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.*

Ορισμός 5.60. Δοθέντων δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, η *συνάρτηση υπό συνθήκης κατανομής της Y, όταν $X = x$*, $F_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, ορίζεται ως:

$$F_{Y|X}(y \,|\, x) = P(Y \le y \,|\, X = x), \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } P(X = x) > 0.$$

Επιπλέον, αν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση υπό συνθήκης μάζας της Y, όταν $X = x$*, $f_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, ως:

$$f_{Y|X}(y \,|\, x) = P(Y = y \,|\, X = x), \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } P(X = x) > 0,$$

ενώ, αν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση υπό συνθήκης πυκνότητάς της Y, όταν $X = x$*, $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, ως μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F_{Y|X}(y \,|\, x) = \int_{v=-\infty}^{y} f_{Y|X}(y \,|\, u)\, du, \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } f_X(x) > 0.$$

Επομένως,

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } f_X(x) > 0.$$

Θεώρημα 5.49. *Η υπό συνθήκη μέση (ή αναμενόμενη) τιμή της Y, όταν $X = x$, $E(Y\,|\,X)$, είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση (ή αναμενόμενη) τιμή*

$$E(E(Y\,|\,X)) = E(Y).$$

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναφορές

[1] Brémaud, Pierre. *Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] Brzeźniak, Zdzisław, and Zastawniak, Tomasz. *Basic Stochastic Processes.* Springer-Verlag, London, 1999.

[3] Cohn, Donald L. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] Chung, Kai Lai. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities.* Second Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[5] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I. Third Edition. John Wiley, New York, 1968.

[6] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II. Second Edition. John Wiley, New York, 1971.

[7] Grimmett, Geoffrey, and Stirzaker, David. *Probability and Random Processes.* Third Edition. Oxford University Press, Oxford, 2001.

[8] Hoel, Paul G., Port, Sidney C., and Stone, Charles J. *Introduction to Stochastic Processes.* Waveland Press, Long Grove, IL, 1987.

[9] Kleinrock, Leonard. *Queueing Systems. Volume I: Theory.* John Wiley, New York, 1975.