2. Αλυσίδες Markov Συνεχούς Χρόνου

2.1. Ημι-Ομάδες Μεταβάσεων και Γεννήτορες

Αρχίζουμε υπενθυμίζοντας τον ορισμό της αλυσίδας Markov συνεχούς χρόνου στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$, όπου εννοούμε ότι $S = \{1, 2, \ldots, |S|\}$ και $|S| < \infty$, όταν το S είναι πεπερασμένο, και $|S| = \infty$, όταν το S είναι (αριθμήσιμα) άπειρο σύνολο.

Ορισμός 2.19. Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ στο χώρο καταστάσεων S λέγεται ότι είναι μια *αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου*, αν για κάθε ακολουθία χρόνων $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ και για κάθε $i, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, j \in S$, ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov:

$$P(X_{t_n} = j \mid X_{t_{n-1}} = i, X_{t_{n-2}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_n} = j \mid X_{t_{n-1}} = i).$$

Στη συνέχεια, θα παραλείπουμε να αναφέρουμε το χαρακτηρισμό "συνεχούς χρόνου" από τις αλυσίδες Markov, γιατί μόνο τέτοιες αλυσίδες θα μας απασχολήσουν από εδώ και πέρα. Επιπλέον, πάντα θα θεωρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας είναι το αριθμήσιμο σύνολο $S = \{1, 2, \ldots\}$.

Ορισμός 2.20. Δοθείσης της αλυσίδας Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, ο πίνακας $P(s, t)$ με στοιχεία

$$P_{ij}(s, t) = P(X(t) = j \mid X(s) = i), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } 0 \leq s \leq t,$$

ονομάζεται *πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων* και τα στοιχεία του ονομάζονται *πιθανότητες μεταβάσεων* μεταξύ των καταστάσεων της αλυσίδας. Προφανώς, όταν ο χώρος καταστάσεων S είναι πεπερασμένος, ας πούμε $|S| = k$, τότε ο πίνακας P είναι τάξης $k \times k$, ενώ διαφορετικά, για S αριθμήσιμα άπειρο, η τάξη του πίνακα P είναι άπειρη.

Η αλυσίδα Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ονομάζεται *ομοιογενής*, αν, για κάθε $i, j \in S$ και κάθε $0 \leq s \leq t$,

$$P_{ij}(s, t) = P_{ij}(0, t - s).$$

Γράφουμε:

$$P_{ij}(t - s) = P_{ij}(s, t)$$

δηλαδή, γράφουμε για τον πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P(t) = P(0, t), \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε σε μια αλυσίδα Markov, θα εννοούμε πάντα ότι πρόκειται για μια ομοιογενή αλυσίδα.

Θεώρημα 2.14. *Η μονοπαραμετρική οικογένεια πινάκων πιθανοτήτων μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i, j \in S, t \geq 0\}$ αποτελεί μια ημι-ομάδα στοχαστικών πινάκων με την έννοια ότι:*

(i) $P(0) = I$, *ο ταυτοτικός πίνακας,*

(ii) *για κάθε $t \geq 0$, πίνακας $P(t)$ είναι στοχαστικός, δηλαδή, τα στοιχεία του είναι μη αρνητικά και τα αθροίσματα των σειρών του είναι 1, και*

(iii) *ισχύουν οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:*

$$P(s + t) = P(s)P(t), \text{ για κάθε } s, t \geq 0.$$

Έτσι, η οικογένεια $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i, j \in S, t \geq 0\}$ ονομάζεται ημι-ομάδα μεταβάσεων.

Ορισμός 2.21. Λέμε ότι η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ είναι *συνεχής στην αρχή*, αν

$$\lim_{h\downarrow 0} P(h) = P(0) = I,$$

όπου η σύγκλιση αυτή ισχύει για κάθε στοιχείο των πινάκων των πιθανοτήτων μεταβάσεων, δηλαδή,

$$\lim_{h\downarrow 0} P_{ij}(h) = 0, \text{ για κάθε } i,j \in S, i \neq j,$$

$$\lim_{h\downarrow 0} P_{ii}(h) = 1, \text{ για κάθε } i \in S.$$

Πρόταση 2.9. *Αν η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ είναι συνεχής στην αρχή, τότε η ημι-ομάδα είναι συνεχής σε κάθε χρόνο $t \geq 0$, δηλαδή,*

$$\lim_{h\to 0} P(t+h) = P(t), \text{ για κάθε } t \geq 0,$$

όπου πάλι η σύγκλιση στο παραπάνω όριο ισχύει για κάθε στοιχείο των πινάκων των πιθανοτήτων μεταβάσεων.

Ορισμός 2.22. Δοθείσης της ημι-ομάδας μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$, έστω ο πίνακας (γενικώς $|S| \times |S|$) $G = \{G_{ij} : i,j \in S\}$, που ορίζεται ως εξής:

(i) $G_{ij} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{P_{ij}(h)}{h}$, για κάθε $i,j \in S, i \neq j$,

(ii) $G_{ii} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{P_{ii}(h)-1}{h}$, για κάθε $i \in S$,

δηλαδή,

$$G = \lim_{t\downarrow 0} \frac{P(t) - I}{t}.$$

Τότε ο πίνακας G ονομάζεται (*απειροστός*) *γεννήτορας* της ημι-ομάδας $P(t)$.

Θεώρημα 2.15. *Αν η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ είναι συνεχής στην αρχή (οπότε και για κάθε χρόνο), τότε υπάρχει ο γεννήτοράς της $G = \{G_{ij} : i,j \in S\}$ και είναι τέτοιος ώστε, για κάθε $i,j \in S, i \neq j$,*

- $0 \leq G_{ij} < \infty$,
- $0 \geq G_{ii} \geq -\infty$, *εκτός αν S πεπερασμένο, οπότε $0 \geq G_{ii} > -\infty$.*

Ορισμός 2.23. Έστω μια αλυσίδα Markov, της οποίας η ημι-ομάδα μεταβάσεων έχει γεννήτορα G. Η αλυσίδα αυτή λέγεται *συντηρητική* (*conservative*), αν $\sum_{j\in S} G_{ij} = 0$, δηλαδή, αν

$$G1 = 0,$$

όπου με 1 συμβολίζουμε το διάνυσμα, του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι 1.

Παρατήρηση 2.3. Γενικώς, έχουμε $\sum_{j\in S} G_{ij} \leq 0$, εκτός αν S πεπερασμένο, οπότε η αλυσίδα είναι συντηρητική (δηλαδή, $\sum_{j\in S} G_{ij} = 0$ ή $G1 = 0$).

Ορισμός 2.24. Λέμε ότι η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t) = \{P_{ij}(t)\colon i,j \in S, t \geq 0\}$ είναι *ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή*, αν

$$\lim_{h\downarrow 0} P_{ii}(h) = 1, \text{ ομοιόμορφα για κάθε } i \in S.$$

Προφανώς, αν ισχύει ο προηγούμενος ορισμός, τότε $\lim_{h\downarrow 0} P_{ij}(h) = 0$, ομοιόμορφα για $i, j \in S, i \neq j$ (επειδή $P_{ij}(t) \leq 1 - P_{ii}(t)$, για κάθε $t \geq 0$). Επιπλέον, αν η ημι-ομάδα μεταβάσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή, τότε είναι και συνεχής στην αρχή, ενώ, γενικώς, το αντίστροφο ισχύει στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος.

Θεώρημα 2.16. (Οι Εξισώσεις του Kolmogorov.) *Αν $\{P(t) \colon t \geq 0\}$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής ημι-ομάδα μεταβάσεων με γεννήτορα G, τότε η $P(t)$ είναι η μοναδική λύση των εξής διαφορικών εξισώσεων πινάκων:*

(i) της προς τα εμπρός εξίσωσης του Kolmogorov:

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)G, \quad t > 0,$$

δηλαδή, σαν σύστημα εξισώσεων (παραλείποντας το όρισμα του χρόνου),

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = P_{ij}(t)G_{jj} + \sum_{k\in S,\, k\neq j} P_{ik}(t)G_{kj}, \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } t > 0,$$

(ii) της προς τα πίσω εξίσωσης του Kolmogorov:

$$\frac{d}{dt}P(t) = GP(t), \quad t > 0,$$

δηλαδή, σαν σύστημα εξισώσεων,

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = G_{ii}P_{ij}(t) + \sum_{k\in S,\, k\neq i} G_{ik}P_{kj}(t), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } t > 0.$$

με την αρχική συνθήκη $P(0) = I$. Επιπλέον, ισχύουν:

$$P(t) = e^{tG}, \text{ για } t \geq 0, \text{ και } \quad G1 = 0.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι, ειδικότερα όταν S πεπερασμένο, ο εκθετικός πίνακας $P = e^{tG}$ δίνεται ως το εξής ανάπτυγμα δυνάμεων του πίνακα G:

$$P(t) = e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}G^n, \quad t \geq 0.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει το χαρακτηρισμό των πινάκων, που μπορούν να είναι γεννήτορες ομοιόμορφα συνεχών ημιο-ομάδων.

Θεώρημα 2.17. *Ένας πίνακας $A = \{A_{ij} \colon i, j \in S\}$, τέτοιος ώστε $\sup_{i\in S}\sum_{j\in S}|A_{ij}|$, είναι ο γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημι-ομάδας μεταβάσεων $P(t)$ αν και μόνον αν*

$$A_{ij} \geq 0, \text{ για κάθε } i, j \in S, i \neq j, \text{ και } \sum_{j\in S} A_{ij} = 0, \text{ για όλα τα } i \in S.$$

Ορισμός 2.25. Δοθείσης της αλυσίδας Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ και της κατάστασης $i \in S$, όταν $X(s) = i$ (σε κάποιο χρόνο $s \geq 0$), ορίζουμε το *χρόνο στάσης* (*holding time*) της αλυσίδας στην κατάσταση i ως:

$$U_i = \inf\{t \geq 0 \colon X(s + t) \neq i\}.$$

Πρόταση 2.10. *Έστω η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G. Τότε ισχύουν τα εξής:*

- *Η $P(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή αν και μόνον αν $\sup_{i\in S} G_{ii} < \infty$.*
- *Η τυχαία μεταβλητή U_i του χρόνου στάσης στην κατάσταση i κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο $-G_{ii}$, για κάθε $i \in S$.*
- *Επιπλέον, η πιθανότητα η αλυσίδα να μεταπηδήσει στην κατάσταση j, έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i, είναι $-G_{ij}/G_{ii}$, για κάθε $i, j \in S$.*

Ορισμός 2.26. Δοθείσης της ημι-ομάδας μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G, μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται:

- *στιγμιαία*, αν $G_{ii} = -\infty$,
- *ευσταθής*, αν $0 > G_{ii} > -\infty$,
- *απορροφητική* (*absorbing*), $G_{ii} = 0$.

Θεώρημα 2.18. *Έστω μια αλυσίδα Markov με συνεχή στην αρχή ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$ και αντίστοιχο γεννήτορα G. Αν η αλυσίδα είναι συντηρητική ($G1 = 0$) και όλες οι καταστάσεις είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$), τότε ισχύει η προς τα πίσω εξίσωση του Kolmogorov ($\frac{d}{dt}P(t) = GP(t)$). Αν, επιπλέον, $\sum_{k\in S} G_{kk}P_{ik}(t) > -\infty$, για κάθε $i \in S$ και $t \geq 0$, τότε ισχύει και η προς τα εμπρός εξίσωση του Kolmogorov ($\frac{d}{dt}P(t) = P(t)G$).*

Πρόταση 2.11. *Έστω η αλυσίδα Markov $X(t)$ με διάνυσμα κατανομής $\mu^{(t)} = \{\mu_i^{(t)} = P(X(t) = i)\colon i \in S\}$, για $t \geq 0$, με συνεχή στην αρχή ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$ και αντίστοιχο γεννήτορα G. Αν η αλυσίδα είναι συντηρητική ($G1 = 0$), όλες οι καταστάσεις είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$), και $\sum_{i\in S} G_{ii}\mu_i^{(t)} > -\infty$, για κάθε $t \geq 0$, τότε ισχύει η εξής ολική εξίσωση του Kolmogorov:*

$$\frac{d}{dt}\mu_i^{(t)} = G_{ii}\mu_i^{(t)} + \sum_{k\in S,\, k\neq i} G_{ki}\mu_k^{(t)}, \quad t > 0.$$

2.2. Ταξινόμηση Καταστάσεων

Θεώρημα 2.19. *Έστω η ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε $i \in S, P_{ii}(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$.*

(ii) *Διχοτομία του Levy: για κάθε $i \in S, i \neq j$, είτε $P_{ij}(t) = 0$, για κάθε $t > 0$, ή $P_{ij}(t) > 0$, για κάθε $t > 0$.*

Ορισμός 2.27. Μια ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G, ονομάζεται *αδιαχώριστη* (ή *μη διαχωρίσιμη* ή *μη αναγώγιμη*) (*irreducible*), αν, για κάθε $i, j \in S$, $P_{ij}(t) > 0$, για κάποιο και, άρα, και για κάθε $t > 0$.

Ορισμός 2.28. Δοθείσης μιας αλυσίδας Markov $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ στον (αριθμήσιμο) χώρο καταστάσεων S, μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται *επαναφερόμενη* (ή *επαναλαμβανόμενη*) (*recurrent*) για την X, όταν

$$P(\text{το σύνολο } \{t \geq 0\colon X(t) = i\} \text{ να είναι μη φραγμένο} \,|\, X(0) = i) = 1,$$

και η i ονομάζεται *παροδική* (*transient*) για την X, όταν

$$P(\text{το σύνολο } \{t \geq 0\colon X(t) = i\} \text{ να είναι μη φραγμένο} \,|\, X(0) = i) = 0.$$

Ορισμός 2.29. Έστω μια αλυσίδα Markov $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ στον S. Συμβολίζουμε με T_n το χρόνο της n-οστής αλλαγής καταστάσεων της αλυσίδας X, όπου υποθέτουμε ότι $T_0 = 0$. Έστω η στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου, που ορίζεται από τη σχέση

$$Z_n = X(T_n+),$$

δηλαδή, η στοχαστική διαδικασία των τιμών που παίρνει η αλυσίδα X αμέσως μετά τις αλλαγές των καταστάσεών της. Τότε η Z_n αποτελεί μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, η οποία ονομάζεται *αλυσίδα μεταπτώσεων* (*jump chain*) της X.

Πρόταση 2.12. *Η αλυσίδα μεταπτώσεων είναι συντηρητική ($G1 = 0$) και όλες οι καταστάσεις της είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$).*

Παρατήρηση 2.4. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η Z_n έχει πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $H_{ij} = -G_{ij}/G_{ii}$, όταν $G_{ii} < 0$. Φυσικά, όταν $G_{ii} = 0$, η αλυσίδα Z_n παραμένει στην κατάσταση i, εφόσον πάει εκεί κάποτε. Επιπλέον, αν $Z_n = j$, ο χρόνος στάσης $T_{n+1} - T_n$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $-G_{jj}$.

Ορισμός 2.30. Έστω T_n ο χρόνος της n-οστής αλλαγής καταστάσεων της αλυσίδας Markov X ($T_0 = 0$). Τότε ορίζουμε μια αλυσίδα Markov (συνεχούς χρόνου) από τις σχέσεις:

$$X(t) = \begin{cases} Z_n, & \text{αν } T_n \leq t < T_{n+1}, \\ \infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n < \infty$, το T_∞ ονομάζεται *χρόνος έκρηξης* της αλυσίδας X και λέμε ότι η αλυσίδα αυτή *εκρήγνειται*, αν $P(T_\infty < \infty) > 0$.

Θεώρημα 2.20. *Η αλυσίδα X, που κατασκευάσθηκε πιο πάνω, δεν μπορεί να εκραγεί, αν ικανοποιείται μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:*

(i) *S πεπερασμένο.*

(ii) $\sup_{i\in S} G_{ii} > -\infty$.

(iii) *$X(0) = i$, όπου i είναι μια επαναφερόμενη κατάσταση για την αλυσίδα μεταπτώσεων Z.*

Θεώρημα 2.21. *Έστω πάλι η αλυσίδα X, που κατασκευάσθηκε πιο πάνω.*

(i) *Αν $G_{ii} = 0$, τότε η κατάσταση i είναι μια επαναφερόμενη κατάσταση για την παραπάνω αλυσίδα συνεχούς χρόνου X.*

(ii) *Όταν $G_{ii} = 0$, η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη για την αλυσίδα συνεχούς χρόνου X αν και μόνον αν είναι επαναφερόμενη για την αλυσίδα μεταπτώσεων Z. Επιπλέον, η i είναι επαναφερόμενη, αν οι πιθανότητες μεταβάσεων $P_{ii}(t) = P(X(t) = i \,|\, X(0) = i)$ ικανοποιούν τη συνθήκη $\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \infty$, και είναι παροδική, διαφορετικά.*

2.3. Στάσιμες Κατανομές

Ορισμός 2.31. Ένα διάνυσμα σειράς $\pi = (\pi_j : j \in S)$ λέγεται ότι αποτελεί μια *στάσιμη κατανομή* της αλυσίδας Markov $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, η οποία έχει ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, αν το π ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

(i) $\pi_j \geq 0$, για κάθε $j \in S$, και $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$, και

(ii) $\pi P(t) = \pi$, για κάθε $t \geq 0$, με την έννοια ότι $\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}(t) = \pi_j$, για κάθε $j \in S$ και κάθε $t \geq 0$.

Παρατήρηση 2.5. Παρατηρούμε ότι η πρώτη από τις δυο συνθήκες του προηγούμενου ορισμού λέει ότι το π είναι ένα διάνυσμα (μέτρου) πιθανότητας. Επιπλέον, έστω $\mu^{(t)} = \{\mu_i^{(t)} = P(X(t) = i) \colon i \in S\}$, για $t \geq 0$, το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής (συνεχούς χρόνου) $X(t)$. Επειδή από τις εξισώσεις Chapamn-Kolmogorov παίρνουμε $\mu^{(t)} = \mu^{(0)} P(t)$, η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται ότι, αν $\mu^{(0)} = \pi$, τότε $\mu^{(t)} = \pi P(t) = \pi$, για κάθε $t > 0$, δηλαδή, το διάνυσμα π αποτελεί ένα *αναλλοίωτο μέτρο* (πιθανότητας) για την αλυσίδα Markov.

Πρόταση 2.13. *Έστω μια αλυσίδα Markov με συνεχή στην αρχή ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$ και αντίστοιχο γεννήτορα G. Αν η αλυσίδα είναι συντηρητική ($G1 = 0$), όλες οι καταστάσεις είναι ευσταθείς ($0 > G_{ii} > -\infty$, για κάθε $i \in S$), και υπάρχει η στάσιμη κατανομή π ($\pi P(t) = \pi$, για κάθε $t \geq 0$) τέτοια ώστε $\sum_{j \in S} G_{jj} \pi_j > -\infty$, τότε ισχύει η εξής ολική εξίσωση ισοζυγίου:*

$$\pi G = 0,$$

δηλαδή, το σύστημα:

$$G_{jj} \pi_j = \sum_{i \in S,\, i \neq j} G_{ij} \pi_i, \text{ για κάθε } j \in S \text{ και κάθε } t > 0.$$

Πρόταση 2.14. *Έστω η αλυσίδα Markov $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ σε ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S, με ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$, που είναι συνεχής στην αρχή και έχει γεννήτορα G. Τότε υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π ($\pi P(t) = \pi$, για κάθε $t \geq 0$) αν και μόνον αν ισχύει η εξής ολική εξίσωση ισοζυγίου:*

$$\pi G = 0.$$

Θεώρημα 2.22. *Έστω η αδιαχώριστη αλυσίδα Markov $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, η οποία έχει ημι-ομάδα μεταβάσεων $P(t)$.*

(i) Αν υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π, τότε αυτή είναι μοναδική και

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \pi_j \text{ για κάθε } i, j \in S.$$

(ii) Αν δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = 0 \text{ για κάθε } i, j \in S.$$

Παράδειγμα 2.8. Έστω η αλυσίδα Markov X στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2\}$. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ο γεννήτορας G του πίνακα μεταβάσεων $P(t)$ της αλυσίδας αυτής:

$$G = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Ζητούμε να βρούμε πίνακα μεταβάσεων $P(t)$ και τη στάσιμη κατανομή π της αλυσίδας αυτής.

Διαγωνικοποιώντας τον G, βρίσκουμε $G = BAB^{-1}$, όπου

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n = B\big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n\big) B^{-1} \\ &= B \begin{pmatrix} h(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha h(t) + \beta & \alpha[1-h(t)] \\ \beta[1-h(t)] & \alpha + \beta h(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

όπου $h(t) = e^{-t(\alpha+\beta)}$. Έτσι, βρίσκουμε το όριο

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \begin{pmatrix} 1-\rho & \rho \\ 1-\rho & \rho \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \rho = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

και, άρα,

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = i) = \begin{cases} 1-\rho, & \text{αν } i = 1, \\ \rho, & \text{αν } i = 2, \end{cases}$$

ανεξάρτητα από την αρχική κατανομή του $X(0)$. Με άλλα λόγια, $\pi = (1-\rho, \rho)$ είναι η στάσιμη κατανομή αυτής της αλυσίδας. Βέβαια, η κατανομή αυτή θα μπορούσε να είχε βρεθεί και από τη σχέση $\pi G = 0$.

2.4. Διαδικασία Poisson

Γενικώς, μια διαδικασία Poisson είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, όπου οι παρατηρούμενες μεταβλητές είναι οι τυχαίοι χρόνοι, στους οποίους μια ακολουθία γεγονότων μπορεί να συμβεί. Ειδικότερα, τα γεγονότα αυτά θεωρούνται ότι είναι διαφορετικοί τύποι αφίξεων, π.χ., πελατών σε μια ουρά, πακέτων δεδομένων σε έναν κόμβο ενός δικτύου υπολογιστών, σωματιδίων σε ένα μετρητή Geiger κ.ο.κ. Πιο συγκεκριμένα, ο πλήρης ορισμός της διαδικασίας Poisson είναι ως εξής:

Ορισμός 2.32. Μια *διαδικασία Poisson με ένταση* λ (μερικές φορές συμβολιζόμενη ως $PP(\lambda)$) είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $N = \{N(t) : t \geq 0\}$, η οποία παίρνει τιμές στο $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και είναι τέτοια ώστε:

(i) $N(0) = 0$ και, αν $s < t$, τότε $N(s) \leq N(t)$,

(ii) $P(N(t+h) = n+m \,|\, N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & \text{αν } m = 1, \\ o(h), & \text{αν } m > 1, \\ 1 - \lambda h + o(h), & \text{αν } m = 0, \end{cases}$

όπου $g(h) = o(h)$ σημαίνει ότι $\frac{g(h)}{h} \to 0$, καθώς $h \downarrow 0$,

(iii) ερμηνεύοντας τις τυχαίες μεταβλητές N σαν χρόνους αφίξεων, ο αριθμός των αφίξεων $N(t) - N(s)$ στο χρονικό διάστημα $(s, t]$ είναι ανεξάρτητος από τις αφίξεις $N(\tau)$, για $\tau \in (0, s]$.

Πρόταση 2.15. *Η διαδικασία Poisson με ένταση λ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt, δηλαδή,*

$$P(N(t) = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \,.$$

Πρόταση 2.16. *Η διαδικασία Poisson με ένταση λ είναι μια αλυσίδα Markov (συνεχούς χρόνου) $N = \{N(t) \colon t \geq 0\}$, η οποία παίρνει τιμές στο $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.*

Με ένα διαφορετικό τρόπο, μια διαδικασία Poisson περιγράφεται ως εξής: Έστω μια ακολουθία χρόνων $T_0, T_1, \ldots$, που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$T_0 = 0, \quad T_n = \inf\{t \geq 0 \colon N(t) = n\},$$

δηλαδή, ο χρόνος T_n θεωρείται ότι είναι ο χρόνος της n-οστής άφιξης. Τότε μπορούν να ορισθούν τα *χρονικά διαστήματα μεταξύ αφίξεων* σαν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$X_n = T_n - T_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \dots \; .$$

Αν γνωρίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές N, μπορούμε να βρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$. Αλλά και αντιστρόφως, από τα X_i μπορύμε να ανακατασκευάσουμε τα N ως εξής:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad N(t) = \max\{n = 1, 2, \dots \colon T_n \leq t\}.$$

Πρόταση 2.17. *Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και κάθε μια από αυτές ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ αν και μόνον αν η N είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση λ.*

2.5. Διαδικασίες Γέννησης και Θανάτου

Ορισμός 2.33. Μια *διαδικασία γέννησης και θανάτου* είναι μια αλυσίδα Markov (συνεχούς χρόνου) $X = \{X(t) \colon t \geq 0\}$, η οποία παίρνει τιμές στο $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ και είναι τέτοια ώστε:

(i) $$P(X(t+h) = n+m \mid X(t) = n) = \begin{cases} \lambda_n h + o(h), & \text{αν } m = 1, \\ \mu_n h + o(h), & \text{αν } m = -1, \\ o(h), & \text{αν } |m| > 1, \\ 1 - (\lambda_n + \mu_n)h + o(h), & \text{αν } m = 0, \end{cases}$$

(ii) οι *ρυθμοί γεννήσεων* $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ και οι *ρυθμοί θανάτων* $\mu_0, \mu_1, \dots$ είναι $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \mu_0 = 0$.

Πρόταση 2.18. *Ο γεννήτορας της διαδικασίας γέννησης και θανάτου $G = \{G_{ij} \colon i, j \geq 0\}$ είναι*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Άρα, η αλυσίδα αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής στην αρχή αν και μόνον αν $\sup_{i=0,1,\dots} \sup\{\lambda_i + \mu_i\} < \infty$.

Παρατήρηση 2.6. Η αλυσίδα γέννησης και θανάτου είναι αδιαχώριστη, εκτός αν $\lambda_0 = 0$, οπότε η κατάσταση 0 είναι απορροφητική.

Από την εξίσωση ολικού ισοζυγίου ($\pi G = 0$), έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 &= 0, \\ \lambda_{n-1}\pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1}\pi_{n+1} &= 0, \text{ για } n \geq 1, \end{aligned}$$

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τη μοναδική στάσιμη κατανομή π:

Πρόταση 2.19.

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \pi_0, \quad \text{για } n \geq 1, \qquad \pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)^{-1},$$

αν και μόνον αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} < \infty,$$

όπου ο όρος $n = 0$ *λαμβάνεται ως* 1.