1. Αλυσίδες Markov

1.1. Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορισμός 1.1. Μια *στοχαστική διαδικασία* είναι μια μονο-παραμετρική οικογένεια $\{X(t)\}$ τυχαίων μεταβλητών, που είναι όλες ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η παράμετρος t συνήθως παριστάνει το *χρόνο* και παίρνει είτε διακριτές ή συνεχείς τιμές (θα δούμε αμέσως μετά τι σημαίνει αυτό). Με άλλα λόγια, για κάθε τιμή της παραμέτρου t, $X(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(t)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, για κάθε σύνολο Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Όταν η παράμετρος t παίρνει διακριτές τιμές, τότε συνήθως γράφουμε (σαν δείκτη) n αντί για t (σε παρενθέσεις), όπου θεωρούμε ότι $n = 0, 1, \ldots$, και λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ αποτελεί μια *στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου*.

Όταν η παράμετρος t παίρνει συνεχείς τιμές, θεωρούμε ότι $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, και η στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ονομάζεται *στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου*.

Μπορεί κάποιες φορές να μιλάμε απλώς για *στοχαστική διαδικασία*. Τότε το αν πρόκειται για διαδικασία διακριτού ή συνεχούς χρόνου θα φαίνεται είτε από τα συμφραζόμενα ή το συμβολισμό του χρόνου ($\{X_n\}$ ή $\{X(t)\}$).

Στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε στις τυχαίες μεταβλητές μιας στοχαστικής διαδικασίας (για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου του χρόνου), θα υποθέτουμε πάντα ότι όλες αυτές οι τυχαίες μεταβλητές ορίζονται πάνω στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Μια από τις σημαντικότερες ειδικές περιπτώσεις των στοχαστικών διαδικασιών είναι οι *στοχαστικές διαδικασίες Markov* (ή *Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες*). Σε γενικές γραμμές δυο είναι τα συγκεκριμένα ειδικά χαρακτηριστικά των διαδικασιών Markov:

- Το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}_{n\geq 0}$ (ή $\{X(t)\}_{t\geq 0}$) είναι διακριτές και παίρνουν τιμές σε ένα αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο S, το οποίο ονομάζεται *χώρος καταστάσεων* και τα στοιχεία του ονομάζονται *καταστάσεις* της διαδικασίας. Επιπλέον, αν $X_n = s_j$ (ή $X(t) = s_j$), για κάποιο $s_j \in S$, λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X_n (ή $X(t)$) *βρίσκεται στην κατάσταση* s_j στο χρόνο n (ή t).
- Και το γεγονός, που ονομάζεται *ιδιότητα Markov*, ότι η στοχαστική διαδικασία *στερείται μνήμης* με την έννοια που θα διευκρινισθεί καλύτερα στους ορισμούς που ακολουθούν.

Ορισμός 1.2. Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n\geq 0}$ λέγεται ότι είναι μια *αλυσίδα Markov*, αν ικανοποιούνται οι εξής δυο συνθήκες:

(i) Όλες οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}_{n\geq 0}$ παίρνουν τιμές στο ίδιο αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων S.

(ii) Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$, για κάθε $s_i, s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{n-1}}, s_j \in S$, ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov:

$$P(X_{n+1} = s_j \,|\, X_n = s_i, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \ldots, X_1 = s_{i_1}, X_0 = s_{i_0}) = P(X_{n+1} = s_j \,|\, X_n = s_i).$$

Ορισμός 1.3. Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ λέγεται ότι είναι μια *αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου*, αν ικανοποιούνται οι εξής δυο συνθήκες:

(i) Όλες οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ παίρνουν τιμές στο ίδιο αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων S.

(ii) Για κάθε ακολουθία χρόνων $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ και για κάθε $s_i, s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{n-1}}, s_j \in S$, ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov:

$$P(X_{t_n} = s_j \,|\, X_{t_{n-1}} = s_i, X_{t_{n-2}} = s_{i_{n-1}}, \ldots, X_{t_0} = s_{i_0}) = P(X_{t_n} = s_j \,|\, X_{t_{n-1}} = s_i).$$

1.2. Μεταβάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τις Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου, δηλαδή, τις αλυσίδες Markov. Επιπλέον, για κάθε αλυσίδα Markov, θα συμβολίζουμε το χώρο καταστάσεών της με $S = \{1, 2, \ldots\}$, εννοώντας ότι $S = \{1, 2, \ldots, |S|\}$, όπου $|S| < \infty$, όταν το S είναι πεπερασμένο, και $|S| = \infty$, όταν το S είναι (αριθμήσιμα) άπειρο σύνολο.

Ορισμός 1.4. Μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ ονομάζεται *ομοιογενής*, αν, για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $i, j \in S$,

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = P(X_1 = j \,|\, X_0 = i).$$

Στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε σε μια αλυσίδα Markov, θα εννοούμε πάντα ότι πρόκειται για μια ομοιογενή αλυσίδα.

Ορισμός 1.5. Έστω η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$. Τότε ο πίνακας P με στοιχεία

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ και κάθε } n \geq 0,$$

ονομάζεται *πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων* και τα στοιχεία του ονομάζονται *πιθανότητες μεταβάσεων* μεταξύ των καταστάσεων της αλυσίδας. Προφανώς, όταν ο χώρος καταστάσεων S είναι πεπερασμένος, ας πούμε $|S| = k$, τότε ο πίνακας P είναι τάξης $k \times k$, ενώ διαφορετικά, για S αριθμήσιμα άπειρο, η τάξη του πίνακα P είναι άπειρη.

Πρόταση 1.1. *Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων P είναι ένας στοχαστικός πίνακας, με την έννοια ότι:*

- *τα στοιχεία του P είναι μη αρνητικά, δηλαδή, $P_{ij} \geq 0$, για κάθε $i, j \in S$.*
- *τα αθροίσματα των γραμμών του P είναι ίσα με 1, δηλαδή, $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1$, για κάθε $i \in S$.*

Ορισμός 1.6. Για κάθε δυο ακέραιους $m, n \geq 0$, ο πίνακας $P(m, m+n)$ με στοιχεία

$$P_{ij}(m, m+n) = P(X_{m+n} = j \,|\, X_m = i), \text{ για } i, j \in S,$$

ονομάζεται *πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων σε n βήματα* και τα στοιχεία του ονομάζονται *πιθανότητες μεταβάσεων σε n βήματα* μεταξύ των καταστάσεων της αλυσίδας Markov.

Προφανώς, $P(m, m+1) = P$. Επιπλέον όμως, ο $P(m, m+n)$ δεν εξαρτάται από το m, όπως συνεπάγεται το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.1. (**Οι Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov**.) *Για κάθε ακέραιους $m, n, r \geq 0$, ισχύει*

$$P_{ij}(m, m+n+r) = \sum_{l \in S} P_{il}(m, m+n)\, P_{lj}(m+n, m+n+r).$$

Δηλαδή,

$$P(m, m+n+r) = P(m, m+n)\, P(m+n, m+n+r)$$

και, άρα,

$$P(m, m+n) = P^n, \;\; \textit{η} \;\; n\textit{–οστή δύναμη του } P.$$

Με άλλα λόγια, συμβολίζοντας με $P(n)$ τον πίνακα $P(0, n)$,

$$P_{ij}(n) = P_{ij}(0, n), \text{ για κάθε } i, j \in S \text{ για κάθε } n \geq 0,$$

από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov παίρνουμε

$$P(n) = P(0, n) = P(m, m+n) = P^n, \text{ για κάθε } n, m = 0, 1, \ldots$$

Αν, επιπλέον, για κάθε χρόνο $n = 0, 1, \ldots$, συμβολίσουμε με $\mu^{(n)} = (\mu_i^{(n)} \colon i \in S)$ το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X_n (δηλαδή, $\mu_i^{(n)} = P(X_n = i)$, για κάθε $i \in S$ και κάθε $n = 0, 1, \ldots$), τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.2. $\mu^{(m+n)} = \mu^{(m)} P(n)$ *και, άρα,* $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$.

1.3. Τυχαίοι Περίπατοι

Μια ειδική περίπτωση αλυσίδας Markov είναι ο τυχαίος περίπατος, που ορίζεται σύμφωνα με τα παρακάτω.

Ορισμός 1.7. Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n \geq 0}$ λέγεται ότι αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές, που είναι *κατανεμημένες ανεξάρτητα και όμοια* (*κ.α.ο.*), αν η διαδικασία αυτή

(i) αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (που σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές κάθε πεπερασμένης υποσυλλογής της διαδικασίας αυτής είναι ανεξάρτητες) και

(ii) όλες αυτές οι τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής, δηλαδή, $P(X_i \leq x) = P(X_j \leq x)$, για κάθε $i, j = 0, 1, \ldots$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.8. Έστω η τυχαία μεταβλητή Y_0, που παίρνει τιμές στο σύνολο των ακέραιων $\mathbb{Z}$. Επιπλέον, έστω μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n\}_{n \geq 1}$, που αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{-1, +1\}$ και οι οποίες είναι κατανεμημένες ανεξάρτητα και όμοια με πιθανότητες, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$,

$$P(X_n = +1) = p, \;\; P(X_n = -1) = q,$$

για κάποια $p, q \in (0, 1), p + q = 1$. Τότε η στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n \geq 0}$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση

$$Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}, \text{ δηλαδή, } Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

ονομάζεται (*απλός*) *τυχαίος περίπατος* στο $\mathbb{Z}$ με παράμετρο $p \in (0, 1)$. Όταν $p = \frac{1}{2}$, ο τυχαίος περίπατος ονομάζεται *συμμετρικός*.

Πρόταση 1.3. *Ο τυχαίος περίπατος* $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ *στο* $\mathbb{Z}$ *με παράμετρο* $p \in (0,1)$ *είναι μια αλυσίδα Markov στο σύνολο καταστάσεων* $S = \mathbb{Z}$ *με τις εξής πιθανότητες μεταβάσεων*

$$P_{ij} = \begin{cases} p, & \text{όταν } j = i+1, \\ q = 1-p, & \text{όταν } j = i-1, \\ 0, & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Επιπλέον, για κάθε $i, j \in \mathbb{Z}$ *και κάθε* $n = 0, 1, \ldots,$

$$P_{ij}(n) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}(n+j-1)} p^{\frac{1}{2}(n+j-1)} q^{\frac{1}{2}(n-j+1)}, & \text{για } n+j-1 \geq 0 \text{ άρτιο}, \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

όπου $P_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$.

Θεώρημα 1.2. *Έστω ο τυχαίος περίπατος* $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ *στο* $\mathbb{Z}$ *με παράμετρο* $p \in (0,1)$ *και* $i \in \mathbb{Z}$. *Τότε*

(i) $\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n) = 0$ *και*

(ii) η πιθανότητα ώστε ο τυχαίος περίπατος αυτός να επιστρέψει στο i, *από όπου έχει ξεκινήσει, είναι*

$$P_{ii}(m) = 1 - |p-q|, \text{ για κάποιο } m \geq 1,$$

όπου $P_{ii}(n) = P(Y_n = i \mid Y_0 = i)$, *για κάθε* $n \geq 1$.

Άρα, όταν $p = q = \frac{1}{2}$, ο τυχαίος περίπατος πάντα επιστρέφει στην κατάσταση, από την οποίαν έχει ξεκινήσει.

1.4. Ταξινόμηση Καταστάσεων

Επιστρέφουμε τώρα στις αλυσίδες Markov και θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε κάτω από ποιες συνθήκες ισχύει σε γενικότερο πλαίσιο η ιδιότητα του τελευταίου αποτελέσματος των τυχαίων περιπάτων. Έστω λοιπόν μια αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P.

Ορισμός 1.9. Μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται *επαναφερόμενη* (ή *επαναλαμβανόμενη*) (*recurrent*), αν, οπωσδήποτε, η αλυσίδα επιστρέφει κάποια (μελλοντική) χρονική στιγμή στην κατάσταση αυτή, από την οποίαν έχει ξεκινήσει αρχικά, δηλαδή, αν

$$P_{ii}(n) = P(X_n = i \mid X_0 = i) = 1, \text{ για κάποιο } n \geq 1.$$

Αν όμως το ενδεχόμενο αυτό δεν είναι σίγουρο, δηλαδή, η προηγούμενη πιθανότητα είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας, η κατάσταση i ονομάζεται *παροδική* (*transient*).

Παράδειγμα 1.1. Έστω ο τυχαίος περίπατος $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ στο $\mathbb{Z}$ με παράμετρο $p \in (0,1)$. Τότε μια κατάσταση $i \in \mathbb{Z}$ είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν $p = \frac{1}{2}$, δηλαδή, αν και μόνον αν ο τυχαίος περίπατος είναι συμμετρικός.

Για να μελετήσουμε τους χρόνους επίσκεψης (ή πρόσπτωσης) σε διάφορες καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov, πρέπει πρώτα να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς (συμβολισμούς).

Ορισμός 1.10. Δοθέντων των καταστάσεων $i, j \in S$ και του χρόνου $n \geq 1$, συμβολίζουμε την πιθανότητα ώστε, όταν η αλυσίδα αρχίσει στην κατάσταση i, να επισκεφθεί στο χρόνο n *για πρώτη φορά* την κατάσταση j, με

$$f_{ij}(n) = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i),$$

και την πιθανότητα ώστε, όταν η αλυσίδα αρχίσει στην κατάσταση i, να επισκεφθεί κάποτε την κατάσταση j (για πρώτη φορά), με

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n).$$

Προφανώς, η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν $f_{ii} = 1$ και παροδική αν και μόνον αν $f_{ii} < 1$.

Όμως, για να δώσουμε κάποια πιο λεπτομερή κριτήρια επαναφοράς με βάση τις πιθανότητες μεταβάσεων στο χρόνο n, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις εξής *γεννήτριες συναρτήσεις*:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_{ij}(n), \;\; F_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f_{ij}(n),$$

όπου $P_{ij}(n) = P(X_n = j \,|\, X_0 = i)$ και δεχόμαστε ότι $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$, το δέλτα του Kronecker, και $f_{ij}(0) = 0$, για κάθε $i, j \in S$. Όπως συνήθως, υποθέτουμε ότι $|s| < 1$, για να εξασφαλισθεί η σύγκλιση (σε απόλυτη τιμή) των παραπάνω σειρών. Τέλος, παρατηρούμε ότι $f_{ij} = F_{ij}(1)$.

Πρόταση 1.4. *Για κάθε $i \in S$,*

(i) $P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s) P_{ii}(s)$,

(ii) $P_{ij}(s) = F_{ij}(s) P_{jj}(s)$, *για κάθε* $j \neq i$.

Πόρισμα 1.1. *Για κάθε $i \in S$,*

(i) η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) = \infty$

(ii) και η κατάσταση i είναι παροδική αν και μόνον αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) < \infty$.

Πόρισμα 1.2. *Αν η κατάσταση i είναι παροδική, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n) < \infty$, για κάθε j. Άρα, αν η i είναι παροδική, τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = 0$, για κάθε j.*

Θεώρημα 1.3. *Για κάθε $i \in S$,*

(i) η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν

$$P(X_n = i, \text{ για άπειρα πολλά } n \,|\, X_0 = i) = 1,$$

(ii) και η κατάσταση j είναι παροδική αν και μόνον αν

$$P(X_n = i, \text{ για άπειρα πολλά } n \,|\, X_0 = i) = 0.$$

Ορισμός 1.11. Για κάθε $i, j \in S$, ο *χρόνος επίσκεψης* (*ή πρόσπτωσης*) στην κατάσταση j, όταν η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση i, ορίζεται ως

$$T_{ij} = \min\{n \geq 1 \colon X_n = j, X_0 = i\},$$

με τη σύμβαση ότι $T_{ij} = \infty$, όταν η αλυσίδα δεν επισκέπτεται ποτέ την κατάσταση j. Επίσης, ορίζεται ο *μέσος χρόνος επίσκεψης* (*ή πρόσπτωσης*) ως

$$\tau_{ij} = E[T_{ij}].$$

Όταν $i = j$, το $\tau_i = \tau_{ii}$ ονομάζεται *μέσος χρόνος επαναφοράς* στην κατάσταση i.

Πόρισμα 1.3. *Για κάθε* $i \in S$,

$$\tau_i = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n), & \text{όταν η } i \text{ είναι επαναφερόμενη,} \\ \infty, & \text{όταν η } i \text{ είναι παροδική.} \end{cases}$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\tau_i = F_{ii}^{'}(1).$$

Ορισμός 1.12. Η επαναφερόμενη κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται *μηδενικά επαναφερόμενη* (*null recurrent*), αν $\tau_i = \infty$, και *μη μηδενικά επαναφερόμενη* (*non-null recurrent*) ή *θετικά επαναφερόμενη*, αν $\tau_i < \infty$.

Παράδειγμα 1.2. Στο συμμετρικό τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{Z}$, κάθε κατάσταση είναι μηδενικά επαναφερόμενη.

Θεώρημα 1.4. *Μια επαναφερόμενη κατάσταση* $i \in S$ *είναι μηδενικά επαναφερόμενη αν και μόνον αν* $\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n) = 0$. *Επιπλέον, όταν ισχύει η σχέση αυτή, τότε* $\lim_{n\to\infty} P_{ji}(n) = 0$, *για κάθε* $j \in S$.

Πρόταση 1.5. *Όταν ο χώρος καταστάσεων* S *μιας αλυσίδας Markov είναι πεπερασμένος, τότε τουλάχιστον μια κατάσταση πρέπει να είναι επαναφερόμενη και κάθε επαναφερόμενη κατάσταση πρέπει να είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη.*

Στη συνέχεια, δοθέντος ενός συνόλου A θετικών ακέραιων αριθμών, συμβολίζουμε με $\gcd A$ το *μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη* των αριθμών του A.

Ορισμός 1.13. Η *περίοδος* $\mathrm{d}(i)$ μιας κατάστασης $i \in S$ ορίζεται ως

$$\mathrm{d}(i) = \gcd\{n \geq 1 \colon P_{ii}(n) > 0\}.$$

Η κατάσταση i ονομάζεται *περιοδική*, αν $\mathrm{d}(i) \geq 2$, και *απεριοδική*, αν $\mathrm{d}(i) = 1$.

Επιπλέον, μια αλυσίδα λέγεται *απεριοδική*, αν όλες οι καταστάσεις της είναι απεριοδικές. Διαφορετικά, η αλυσίδα λέγεται *περιοδική*.

Με άλλα λόγια, η περίοδος της κατάστασης i είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης του συνόλου των χρόνων, για τους οποίους η αλυσίδα μπορεί να ξαναεπιστρέψει στην κατάσταση i, από την οποίαν ξεκινά. Διαφορετικά ειπομένο, $P_{ii}(n) = 0$, εκτός αν το n είναι πολλαπλάσιο του $\mathrm{d}(i)$, το οποίο είναι ο μικρότερος ακέραιος, που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα.

Παράδειγμα 1.3. Όλες οι καταστάσεις ενός τυχαίου περίπατου στο $\mathbb{Z}$ είναι περιοδικές με περίοδο 2, παροδικές, εφόσον $p \neq \frac{1}{2}$, και μηδενικά επαναναφερόμενες, εφόσον $p = \frac{1}{2}$.

Ορισμός 1.14. Μια κατάσταση i ονομάζεται *εργοδική*, αν είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη, και απεριοδική. Και η αλυσίδα ονομάζεται *εργοδική*, αν όλες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές.

1.5. Ταξινόμηση Αλυσίδων

Έστω η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στον αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P.

Ορισμός 1.15. Έστω δυο καταστάσεις $i, j \in S$. Τότε λέμε ότι η κατάσταση i *επικοινωνεί* με την κατάσταση j, αν υπάρχει χρόνος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε

$$P_{ij}(n) = P(X_n = j \,|\, X_0 = i) > 0.$$

Όταν η κατάσταση i επικοινωνεί με την κατάσταση j, γράφουμε "$i \to j$". Αν, επιπλέον, και η κατάσταση j επικοινωνεί με την κατάσταση i, γράφουμε "$i \leftrightarrow j$" και λέμε ότι οι καταστάσεις i και j *επικοινωνούν μεταξύ τους*.

Παρατήρηση 1.1. Ο προηγούμενος ορισμός των επικοινωνούντων μεταξύ τους καταστάσεων εισάγει μια *σχέση ισοδυναμίας* "$\leftrightarrow$" στο $S \times S$ (δηλαδή, μια αυτοπαθή, συμμετρική και μεταβατική διαδική σχέση στο $S \times S$). Επομένως, με τον τρόπο αυτό, ορίζεται ένας διαμερισμός του S σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς αυτήν τη σχέση.

Θεώρημα 1.5. *Αν $i \leftrightarrow j$, τότε:*

(i) η κατάσταση i είναι παροδική αν και μόνον αν και η j είναι παροδική,

(ii) η κατάσταση i είναι επαναφερόμενη αν και μόνον αν και η j είναι επαναφερόμενη,

(iii) η κατάσταση i είναι μηδενικά επαναφερόμενη αν και μόνον αν και η j είναι μηδενικά επαναφερόμενη,

(iv) η κατάσταση i είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη αν και μόνον αν και η j είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη,

(v) η κατάσταση i είναι περιοδική αν και μόνον αν και η j είναι περιοδική, οπότε $\mathrm{d}(i) = \mathrm{d}(j)$,

(vi) η κατάσταση i είναι εργοδική αν και μόνον αν και η j είναι εργοδική.

Ορισμός 1.16. Έστω C ένα σύνολο καταστάσεων μιας αλυσίδας Markov. Τότε το C ονομάζεται:

- *κλειστό*, αν, όταν η αλυσίδα μπει μέσα στο C, ποτέ στη συνέχεια δεν βγαίνει έξω από το σύνολο αυτό, δηλαδή, αν $P_{ij} = 0$, για κάθε $i \in C$ και $j \notin C$,
- *απορροφητικό* (*absorbing*), αν το C είναι κλειστό και περιέχει μόνο μια κατάσταση,
- *αδιαχώριστο* (*irreducible*), αν κάθε δυο καταστάσεις $i, j \in C$ επικοινωνούν μεταξύ τους (δηλαδή, $i \leftrightarrow j$, για κάθε $i, j \in C$).

Ορισμός 1.17. Μια αλυσίδα Markov ονομάζεται *αδιαχώριστη* (ή *μη διαχωρίσιμη* ή *μη αναγώγιμη*) (*irreducible*), αν κάθε δυο καταστάσεις της $i, j \in S$ επικοινωνούν μεταξύ τους (δηλαδή, $i \leftrightarrow j$). Διαφορετικά, η αλυσίδα ονομάζεται *διαχωρίσιμη* (ή *αναγώγιμη*) (*reducible*).

Θεώρημα 1.6. (**Διαμερισμός Χώρου Καταστάσεων.**) *Ο χώρος καταστάσεων S μιας αλυσίδας Markov μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο ως*

$$S = T \cup \bigcup_{j=1}^{N} C_j,$$

όπου τα σύνολα καταστάσεων $T, C_1, \ldots, C_N$ είναι ανά δυο ξένα μεταξύ τους, το T αποτελείται (μόνο) από παροδικές καταστάσεις και κάθε ένα από τα $C_1, \ldots, C_N$ είναι κλειστό και αδιαχώριστο και αποτελείται (μόνο) από επαναφερόμενες καταστάσεις.

Παράδειγμα 1.4. Στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$, θεωρούμε την αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε να ταξινομήσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο επαναφοράς της κατάστασης 1.

Πρώτα, παρατηρούμε ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, που σημαίνει ότι η αλυσίδα αυτή είναι αδιαχώριστη. Ας προσπαθήσουμε τώρα να ταξινομήσουμε την κατάσταση 1. Καθώς έχουμε

$$f_{11}(1) = f_{11}(2) = f_{11}(3) = f_{11}(4) = 1/4, \; f_{11}(n) = 0, \; \text{για } n \geq 5,$$

δηλαδή, $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}(n) = 1$, η κατάσταση 1 είναι επαναφερόμενη. Επίσης, επειδή $\tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}(n) = 1/4 + 1/2 + 3/4 + 1 = 10/4 < \infty$, το 1 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη κατάσταση. Επιπλέον, επειδή $P_{11}(1) > 0$, το 1 είναι και απεριοδική κατάσταση. Επομένως, όλες (και οι τέσσερις) οι καταστάσεις είναι εργοδικές, αφού επικοινωνούν μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1.5. Στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$, θεωρούμε την αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε (i) να ταξινομήσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και (ii) να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων.

(i) Προφανώς, η κατάσταση 2 είναι απορροφητική, απεριοδική (διότι $P_{22}(1) > 0$) και, με τετριμμένο τρόπο, μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη. Το σύνολο $\{1, 3, 4\}$ είναι αδιαχώριστο και κλειστό και, άρα, οι καταστάσεις $1, 3$ και 4 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες. Επιπλέον, επειδή $\mathrm{d}(1) = \mathrm{d}(3) = \gcd\{2, 3, \ldots\} = 1$ και $\mathrm{d}(4) = \gcd\{3, 5, \ldots\} = 1$, οι καταστάσεις $1, 3$ και 4 είναι απεριοδικές και, άρα, εργοδικές.

(ii) Για να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων, πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f_{11}(1) &= 0, \; f_{11}(2) = 1/2, \; f_{11}(3) = 1/2, \; f_{11}(n) = 0, \; \text{για } n \geq 4, \\ f_{22}(1) &= 1, \; f_{22}(n) = 0, \; \text{για } n \geq 2, \\ f_{33}(1) &= 0, \; f_{33}(2k) = 0, \; \text{για } k \geq 1, \; f_{33}(2k+1) = (1/2)^k, \; \text{για } k \geq 1, \\ f_{44}(1) &= 0, \; f_{44}(2) = 1/2, \; f_{44}(3) = 1/2, \; f_{44}(n) = 0, \; \text{για } n \geq 4. \end{aligned}$$

Καθώς, για κάθε επαναφερόμενη κατάσταση i, $\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)$, παίρνουμε $\tau_1 = 5/2, \tau_2 = 1, \tau_3 = 5, \tau_4 = 5/2$.

Παράδειγμα 1.6. Στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, θεωρούμε την αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε (i) να ταξινομήσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και (ii) να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων.

(i) Τα σύνολα $\{1, 2\}$ και $\{5, 6\}$ είναι αδιαχώριστα και κλειστά. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του διαμερισμού του χώρου καταστάσεων, τα σύνολα αυτά πρέπει να περιέχουν μη μηδενικές (θετικές) επαναφερόμενες καταστάσεις (επειδή ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος). Οι καταστάσεις 3 και 4 είναι παροδικές, διότι αυτές επικοινωνούν με τα κλειστά σύνολα $\{1, 2\}$ και $\{5, 6\}$. Όλες οι καταστάσεις έχουν περίοδο 1, διότι $p_{ii}(1) > 0$, για όλα τα i. Έτσι, οι καταστάσεις 3 και 4 είναι παροδικές, ενώ οι καταστάσεις 1, 2, 5 και 6 είναι εργοδικές.

(ii) Για να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων της αλυσίδας αυτής, πρώτα παρατηρούμε ότι, με έναν απλό υπολογισμό, βρίσκουμε:

$$f_{11}(n) = \begin{cases} p_{11} = \frac{1}{2}, & \text{για } n = 1, \\ p_{12}(p_{22})^{n-2} p_{21} = \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^{n-2}\frac{1}{4}, & \text{για } n \geq 2. \end{cases}$$

Άρα, επειδή η κατάσταση 1 είναι επαναφερόμενη, $\tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}(n) = 19/6$. Παρόμοια, μπορούν να βρεθούν και οι υπόλοιποι μέσοι χρόνοι επαναφοράς.

1.6. Στάσιμες Κατανομές

Έστω πάντα η αλυσίδα Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ στον αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων P.

Ορισμός 1.18. Ένα διάνυσμα σειράς $\pi = (\pi_j \colon j \in S)$ λέγεται ότι αποτελεί μια *στάσιμη κατανομή* της αλυσίδας Markov, αν το π ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

(i) $\pi_j \geq 0$, για κάθε $j \in S$, και $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$, και

(ii) $\pi P = \pi$, με την έννοια ότι ισχύει η εξής *εξίσωση ολικού ισοζυγίου*

$$\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j, \text{ για κάθε } j \in S.$$

Παρατήρηση 1.2. Παρατηρούμε ότι η πρώτη από τις δυο συνθήκες του προηγούμενου ορισμού λέει ότι το π είναι ένα διάνυσμα (μέτρου) πιθανότητας, ενώ η δεύτερη συνεπάγεται για το διάνυσμα πιθανότητας της κατανομής της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X_n ότι, αν $\mu^{(0)} = \pi$, τότε $\mu^{(n)} = \pi P^n = \pi$, για κάθε $n > 0$, δηλαδή, το διάνυσμα π αποτελεί ένα *αναλλοίωτο μέτρο* (πιθανότητας) για την αλυσίδα Markov.

Πρόταση 1.6. *Αν, για κάθε* $i, j \in S$, *(i) υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)$*

(ii) και το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο του i, οπότε το συμβολίζουμε ως

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j,$$

τότε είτε το όριο π_j είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της αλυσίδας Markov ή $\pi_j = 0$, για κάθε $j \in S$.

Πόρισμα 1.4. *Αν όλες οι καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov είναι είτε παροδικές ή μηδενικά επαναφερόμενες, τότε δεν υπάρχει καμιά στάσιμη κατανομή για την αλυσίδα αυτή.*

Πρόταση 1.7. *Αν υπάρχει μια στάσιμη κατανομή π, τότε όλες οι καταστάσεις i με $\pi(i) > 0$ είναι επαναφερόμενες.*

Θεώρημα 1.7. *Κάθε αδιαχώριστη αλυσίδα Markov έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή αν και μόνον αν όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες. Στην περίπτωση αυτή, η (μοναδική) στάσιμη κατανομή π δίνεται ως:*

$$\pi_i = \tau_i^{-1}, \text{ για κάθε } i \in S,$$

όπου τ_i είναι ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης i.

<u>*Υπολογισμός των λύσεων της εξίσωσης $\pi = \pi P$ της στάσιμης κατανομής*:</u>

Όταν η αλυσίδα Markov είναι αδιαχώριστη και όλες οι καταστάσεις της είναι επαναφερόμενες, μπορούμε να υπολογίσουμε μια ρίζα x της εξίσωσης πινάκων $x = xP$ ως εξής. Κρατώντας σταθερή μια κατάσταση k, έστω $\rho_i(k)$ το μέσο πλήθος επισκέψεων της αλυσίδας στην κατάσταση i μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση k, δηλαδή, $\rho_i(k) = E[N_i \mid X_0 = k]$, όπου

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{X_n = i\}\cap\{T_k \geq n\}},$$

και έστω T_k ο χρόνος της πρώτης επιστροφής στην κατάσταση k, όπως πριν. Παρατηρούμε ότι $N_k = 1$, οπότε, $\rho_k(k) = 1$, και επίσης

$$\rho_i(k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, T_k \geq n \mid X_0 = k).$$

Επειδή μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στο k, η κατάσταση πρέπει να βρίσκεται κάπου αλλού, $T_k = \sum_{i\in S} N_i$. Οπότε, παίρνοντας τη μέση τιμή, βρίσκουμε

$$\tau_k = \sum_{i\in S} \rho_i(k).$$

Λήμμα 1.1. *Για κάθε επαναφερόμενη κατάσταση k μιας αδιαχώριστης αλυσίδας Markov, το διάνυσμα $\rho(k) = (\rho_i(k) \colon i \in S)$ ικανοποιεί την εξίσωση $\rho(k) = \rho(k)P$ και έχει συνιστώσες $\rho_i(k) < \infty$, για κάθε $i \in S$.*

Όταν η κατάσταση k είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη, $\tau_k < \infty$, παίρνοντας $\pi_i = \rho_i(k)/\tau_k$, βρίσκουμε μια στάσιμη κατανομή της αλυσίδας κι, επομένως, αποδεικνύουμε, έτσι, το μισό μέρος του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.8. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα Markov, της οποίας όλες οι καταστάσεις είναι επαναφερόμενες. Τότε υπάρχει μια θετική ρίζα x της εξίσωσης $x = xP$ (η οποία είναι μοναδική ως προς πολλαπλασιασμό με σταθερά). Επιπλέον, όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες αν και μόνον αν $\sum_{i\in S} x_i < \infty$ και μηδενικά επαναφερόμενες αν και μόνον αν $\sum_{i\in S} x_i = \infty$.*

Θεώρημα 1.9. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα και $s \in S$ μια (οποιαδήποτε) κατάστασή της. Τότε:*

(i) όλες οι κατάστασεις της αλυσίδας είναι παροδικές αν και μόνον αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\{y_j : j \neq s\}$, τέτοιο ώστε $|y_j| \leq 1$, για κάθε $j \neq s$, το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$y_i = \sum_{j:j\neq s} P_{ij} y_j, \text{ για κάθε } i \neq s,$$

(ii) και όλες οι κατάστασεις της αλυσίδας είναι επαναφερόμενες αν και μόνον αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\{y_j : j \neq s\}$, τέτοιο ώστε $\lim_{j\to\infty} y_j = \infty$, για κάθε $j \neq s$,το οποίο ικανοποιεί τις ανισότητες

$$y_i \geq \sum_{j:j\neq s} P_{ij} y_j, \text{ για κάθε } i \neq s.$$

Παράδειγμα 1.7. *Τυχαίος περίπατος στους μη αρνητικούς ακέραιους:* Τώρα $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και οι πιθανότητες μεταβάσεων είναι οι εξής:

$$P_{0,0} = q, P_{i,i+1} = p, \text{ όταν } i \geq 0, P_{i,i-1} = q, \text{ όταν } i \geq 1,$$

για $p, q \in (0, 1), p + q = 1$. Έστω $\rho = p/q$.

(i) Όταν $q < p$, παίρνοντας $s = 0$, βλέπουμε ότι το διάνυσμα $y_j = 1 - \rho^{-j}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του προηγούμενου θεωρήματος και, άρα, όλες οι καταστάσεις αυτού του τυχαίου περίπατου είναι παροδικές.

(ii) Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση πινάκων $\pi = \pi P$, για να βρούμε τη στάσιμη κατανομή $\pi_j = \rho^j(1 - \rho)$, αν και μόνον αν $q > p$. Επομένως, από το αμέσως προηγούμενο θεώρημα, όλες οι καταστάσεις αυτού του τυχαίου περίπατου είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενς αν και μόνον αν $q > p$.

(iii) Όταν $q = p = \frac{1}{2}$, παίρνοντας $s = 0$, βλέπουμε ότι το διάνυσμα $y_j = j$, για κάθε $j \geq 1$, ικανοποιεί τη συνθήκη (ii) του προηγούμενου θεωρήματος και, άρα, όλες οι καταστάσεις αυτού του τυχαίου περίπατου είναι μηδενικά επαναφερόμενες.

Θεώρημα 1.10. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα Markov με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε $P_{ij}(N) > 0$, για κάθε $i, j \in S$, αν και μόνον αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j$, για κάθε $i, j \in S$, και το όριο αυτό είναι τέτοιο ώστε $\pi_j > 0$, για κάθε $j \in S$, και $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$.*

Πόρισμα 1.5. *Κάθε αδιαχώριστη αλυσίδα Markov σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων έχει πάντα μια μοναδική στάσιμη κατανομή.*

Πόρισμα 1.6. *Όλες οι καταστάσεις μιας αδιαχώριστης αλυσίδας Markov σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.*

Πρόταση 1.8. *Αν μια αλυσίδα Markov είναι αδιαχώριστη και έχει στάσιμη κατανομή* π_i, *τότε*

$$\pi_i = \tau_i^{-1}, \text{ για κάθε } i \in S.$$

Θεώρημα 1.11. *Έστω μια αδιαχώριστη αλυσίδα Markov. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Υπάρχει μια κατάσταση, που είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη.

(ii) Υπάρχει μια στάσιμη κατανομή.

(iii) Όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.

Θεώρημα 1.12. *Αν μια αλυσίδα Markov είναι αδιαχώριστη και απεριοδική, τότε, για κάθε* $i, j \in S$,

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}(n) = \tau_j^{-1}$$

και, άρα, η (μοναδική) στάσιμη κατανομή π *της αλυσίδας αυτής είναι η* $\pi_j = \tau_j^{-1}$, *για* $j \in S$.

Πόρισμα 1.7. *Κάθε εργοδική και αδιαχώριστη αλυσίδα Markov έχει μοναδική στάσιμη κατανομή* $\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}(n) = \tau_j^{-1}$, *για κάθε* $i, j \in S$.

Γενικώς όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι:

Θεώρημα 1.13. *Μια αδιαχώριστη και απεριοδική αλυσίδα Markov είναι εργοδική αν και μόνον αν έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή.*