5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Ασκήσεις για Αλυσίδες Markov

5.1. Ασκήσεις

Άσκηση 5.1. Έστω η αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

(i) Βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $P(n)$, χωρίς να χρησιμοποιήσετε δυνάμεις πινάκων.

(ii) Δείξτε ότι όλες οι καταστάσεις είναι επαναφερόμενες.

(iii) Δείξτε ότι όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.

(iv) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή.

Άσκηση 5.2. Έστω η αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(i) Βρείτε τους πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεων $P(2)$ και $P(3)$.

(ii) Δείξτε ότι η αλυσίδα αυτή είναι απεριοδική.

(iii) Είναι η αλυσίδα αυτή εργοδική;

Άσκηση 5.3. Έστω η αλυσίδα Markov στο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων, που δίνεται από τις σχέσεις $P_{0,j} = a_j$, για $j \geq 0$, $P_{ii} = r$ και $P_{i,i-1} = 1 - r$, για $i \geq 1$. Ταξινομήστε όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής και βρείτε τους μέσους χρόνους επαναφοράς τους.

Άσκηση 5.4. Ταξινομήστε τις καταστάσεις της αλυσίδας Markov με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $\begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}$ και υπολογίστε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεών της.

Άσκηση 5.5. Ταξινομήστε τις καταστάσεις των παρακάτω αλυσίδων Markov με τους αντίστοιχους πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεων και υπολογίστε τους μέσους χρόνους επαναφοράς για όσες καταστάσεις αυτό είναι εύκολο:

(i)
$$\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(v)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(vi) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(vii) $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(viii) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ix) $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

(x) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(xi) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(xii) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(xiii) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(xiv) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5.6. Υπολογίστε τις στάσιμες κατανομές των παρακάτω αλυσίδων Markov με τους αντίστοιχους πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεων:

(i) $$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}$$

(iv) $$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

(v) $$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5.7. Για κάθε μια από τις παρακάτω αλυσίδες Markov με τους αντίστοιχους πίνακες πιθανοτήτων μεταβάσεων ταξινομήστε τις καταστάσεις τους και υπολογίστε τις στάσιμες κατανομές τους:

(i) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(iii) $$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) $$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

5.2. Λύσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Λύση Άσκησης 2.1.:

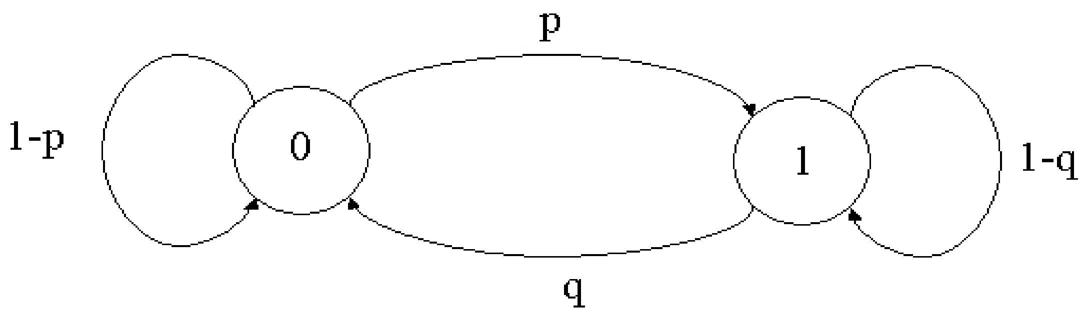
Χώρος καταστάσεων $\{0,1\}$ και πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων:

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix},$$

δηλαδή:

$$P(X_{n+1}=1|X_n=0)=p,$$
$$P(X_{n+1}=0|X_n=1)=q,$$
$$P(X_{n+1}=0|X_n=0)=1-p,$$
$$P(X_{n+1}=1|X_n=1)=1-q.$$

Διάγραμμα του αντίστοιχου μη κατευθυνόμενου γράφου:



<u>**Υπολογισμός της** $P(X_n=0)$ **(και της** $P(X_n=1)=1-P(X_n=0)$**)**</u>
<u>δοθείσης της $P(X_0=0)=\pi_0(0)$:</u>

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=0) &= P(X_{n+1}=0 \text{ και } X_n=0)+P(X_{n+1}=0 \text{ και } X_n=1)= \\ &= P(X_n=0)P(X_{n+1}=0|X_n=0)+P(X_n=1)P(X_{n+1}=0|X_n=1)= \\ &= (1-p)P(X_n=0)+qP(X_n=1)= \\ &= (1-p)P(X_n=0)+q(1-P(X_n=0))= \\ &= (1-p-q)P(X_n=0)+q. \end{aligned}$$

Για $n=0$,

$$P(X_1=0)=(1-p-q)\pi_0(0)+q,$$

για $n=1$,

$$P(X_2=0)=(1-p-q)^2\pi_0(0)+q[1+(1-p-q)],$$

κ.ο.κ., οπότε παίρνουμε με επαγωγή:

$$P(X_n=0)=(1-p-q)^n\pi_0(0)+q\sum_{k=0}^{n-1}(1-p-q)^k.$$

<u>Περίπτωση $0<p,q<1$</u>: Επειδή τότε $|1-p-q|<1$, έχουμε μια γεωμετρική σειρά $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-p-q)^k=\frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(X_n=0)=\frac{q}{p+q}+(1-p-q)^n[\pi_0(0)-\frac{q}{p+q}] \\ P(X_n=1)=\frac{p}{p+q}+(1-p-q)^n[\pi_0(1)-\frac{p}{p+q}] \end{cases}$$

Υπολογισμός της P^n

Γενικώς:

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_i P(X_0 = i \; \kappa\alpha\iota X_n = j) = \\ &= \sum_i P(X_0 = i) P(X_n = j | X_0 = i) = \\ &= \sum_i \pi_0(i) P_{ij}^n \end{aligned}$$

όπου $\pi_0(i) = P(X_0 = i)$, δηλαδή:

$$P(X_n = j) = \sum_i \pi_0(i) P_{ij}^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(X_n = 0) = \pi_0(0) P_{00}^n + \pi_0(1) P_{10}^n \\ P(X_n = 1) = \pi_0(0) P_{01}^n + \pi_0(1) P_{11}^n \end{cases}$$

Για $\pi_0(0) = 1$ και $\pi_0(1) = 0 \Rightarrow$

$$P_{00}^n = P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned} P_{01}^n &= \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q} \\ P_{10}^n &= \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q} \\ P_{11}^n &= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$P^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}$$

Επαναφορά καταστάσεων

Θα δείξουμε ότι η κατάσταση 0 είναι επαναφερόμενη (παρόμοια και για την κατάσταση 1). Αφού $P_{00}(n) = P_{00}^n = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} P_{00}(n) = \frac{q}{p+q} > 0$ (εφόσον $p, q > 0$) και, άρα, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(n) = \infty$, κάτι που συνεπάγεται ότι η κατάσταση 0 είναι επαναφερόμενη.

Μη μηδενική (θετική) επαναφορά καταστάσεων και μέσος χρόνος επαναφοράς

Πάλι θα δείξουμε ότι η κατάσταση 0 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενη. Εξ ορισμού, $f_{00}(1) = 1 - p$ και $f_{00}(n) = P_{01} P_{11}^{n-2} P_{10} = pq(1-q)^{n-2}$, για κάθε $n \geq 2$. Επειδή $|1-q| < 1$, παίρνουμε ότι ο μέσος χρόνος επαναφοράς του 0 είναι $\tau_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}(n) = 1 - p + \sum_{n=1}^{\infty} pq(1-q)^{n-2} = \frac{p+q}{q} < \infty$. Λόγω συμμετρίας, $\tau_1 = \frac{p+q}{p}$. Άρα, και οι δυο καταστάσεις 0 και 1 είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.

Υπολογισμός της στάσιμης κατανομής $\pi = (\pi_0, \pi_1)$

Περίπτωση $0 < p, q < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \lim_{n\to\infty} P_{i0}^n = \frac{q}{p+q} \\ \pi_1 = \lim_{n\to\infty} P_{i1}^n = \frac{p}{p+q} \end{cases}$$

και η $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ είναι η *μοναδική* στάσιμη κατανομή.

Διαφορετικά: Από την $\pi = \pi P$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + q\pi_1 \\ \pi_1 &= p\pi_0 + (1-q)\pi_1 \end{aligned}$$

Και $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$$p\pi_0 = q - q\pi_0 \Rightarrow (p+q)\pi_0 = q \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{q}{p+q} \\ \pi_1 = \frac{p}{p+q} \end{cases}$$

Λύση Άσκησης 2.2.:

Πρώτα, ας βρούμε τον πίνακα $P(2) = P^2$ αλγεβρικά, δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα P με τον εαυτό του:

$$P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Διαφορετικά, ο $P(2)$ μπορεί να βρεθεί εξετάζοντας τις πιθανότητες μεταβάσεων των καταστάσεων σε 2 βήματα. Έτσι, βλέπουμε ότι ο μόνος τρόπος για τη μετάβαση από το 1 στο 1 σε 2 βήματα είναι να γίνει πρώτα η μετάβαση από το 1 στο 2 (με πιθανότητα 1) και στη συνέχεια η μετάβαση από το 2 στο 1 (με πιθανότητα 1/2). Επομένως, $P_{11}(2) = 1/2$. Επίσης, επειδή για τη μετάβαση από το 1 στο 2 σε 2 βήματα πρέπει πρώτα να γίνει η μετάβαση από το 1 στο 2 (με πιθανότητα 1) και μετά να παραμείνουμε στο 2 (με πιθανότητα 1/2), παίρνουμε $P_{12}(2) = 1/2$. Παρόμοια, βρίσκουμε τα άλλα δυο στοιχεία του πίνακα (ή χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο πίνακας αυτός είναι ένας στοχαστικός πίνακας, οπότε το άθροισμα των γραμμών του πρέπει να είναι ίσο προς 1).

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε

$$P(3) = P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

Έτσι, έχουμε $P_{11}(1) = 0, P_{11}(2) = 1/2$ και $P_{11}(3) = 1/4$. Συνεπώς, $\mathrm{d}(1) = 1$ (μολονότι $P_{11}(1) = 0$). Αλλά, αφού $P_{22}(1) = 1/2 > 0$, έπεται ότι και $\mathrm{d}(2) = 1$. Επομένως, η αλυσίδα είναι απεριοδική.

Επειδή (σύμφωνα με την Άσκηση 2.1.) όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας αυτής είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες, η αλυσίδα αυτή είναι εργοδική.

Λύση Άσκησης 2.3.:

Όταν $r = 1$, η κατάσταση i είναι απορροφητική, για κάθε $i \geq 1$, και η 0 είναι παροδική, εκτός αν $a_0 = 1$.

Ας υποθέσουμε ότι $r < 1$ και έστω $J = \sup\{j : a_j \geq 0\}$. Τότε, οι καταστάσεις $0, 1, \ldots, J$ σχηματίζουν μια αδιαχώριστη επαναφερόμενη κλάση και είναι όλες απεριοδικές, αν $r > 0$, ενώ όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι παροδικές. Για $0 \leq i \leq J$, ο χρόνος επαναφοράς της i, που δίνεται ως $T_i = \min\{n \geq 1 \colon X_n = i\}$, είναι τέτοιος ώστε $P(T_i = 1) = r$. Όταν $T_i > 1$, το T_i μπορεί να εκφρασθεί ως το άθροισμα των εξής όρων:

$$\begin{aligned} T_i^{(1)} &= \text{ο χρόνος για να φθάσει η αλυσίδα στο 0, όταν το πρώτο βήμα γίνεται προς τα αριστερά,} \\ T_i^{(2)} &= \text{ο χρόνος των μεταβάσεων, που ξεκινούν από το 0, αλλά δεν φθάνουν στο } i, \\ T_i^{(3)} &= \text{ο χρόνος των μεταβάσεων, που τελικά φθάνουν στο } i. \end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $E[T_i^{(1)}] = 1 + (i-1)/(1-r)$, όταν $i \geq 1$, διότι η μέση τιμή του χρόνου αναμονής σε κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι $(1-r)^{-1}$. Το πλήθος N τέτοιων 'μικρών' επισκέψεων κατανέμεται με πιθανότητα $P(N = n) = \alpha_i(1-\alpha_i)^n, n \geq 0$, όπου $\alpha_i = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j$. Επομένως, $E[N] = (1-\alpha_i)/\alpha_i$. Κάθε τέτοια 'μικρή' επίσκεψη έχει μέση διάρκεια:

$$\sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{j}{1-r} + 1 \right) \frac{\alpha_j}{1-\alpha_i} = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{j\alpha_j}{(1-\alpha_i)(1-r)}$$

και, επομένως,

$$E[T_i^{(2)}] = \frac{1}{\alpha_i} \left\{ (1-\alpha_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{j\alpha_j}{1-r} \right\}.$$

Παρόμοια, παίρνουμε:

$$E[T_i^{(3)}] = \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{j-i}{1-r} \right) \alpha_j.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βρίσκουμε:

$$E[T_i] = r + (1-r)E[T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + T_i^{(3)}] = \frac{1}{\alpha_i} \left(1 - r + \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j \right), \ i \geq 1,$$

και, με έναν παρόμοιο τρόπο, $E[T_0] = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j/(1-r)$. Προφανώς, $E[T_i] < \infty$, για $i \leq J$, εφόσον $\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j < \infty$, κάτι που σίγουρα ισχύει, αν $J < \infty$.

Λύση Άσκησης 2.4.:

Όλες οι καταστάσεις είναι απορροφητικές, όταν $p = 0$. Για αυτό, ας υποθέσουμε ότι $p \neq 0$. Προφανώς, και οι τρεις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής είναι εργοδικές (γιατί η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων).

Για να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των καταστάσεων, προχωράμε ως εξής. Διαγωνικοποιώντας τον πίνακα P, παίρνουμε $P = BQB^{-1}$, όπου

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2p & 0 \\ 0 & 0 & 1-4p \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$P^n = BQ^nB^{-1} = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-2p)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-4p)^n \end{bmatrix} B^{-1},$$

από όπου οι πιθανότητες μεταβάσεων $P_{ij}(n)$ μπορούν εύκολα να βρεθούν:

$$P_{11}(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-2p)^n + \frac{1}{4}(1-4p)^n, \; P_{22}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-4p)^n,$$

και $P_{33}(n) = P_{11}(n)$, λόγω συμμετρίας.

Έτσι, από τον ορισμό του $P_{ij}(s)$ $(= \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_{ij}(n))$, βρίσκουμε

$$P_{11}(s) = P_{33}(s) = \frac{1}{4(1-s)} + \frac{1}{2\{1-s(1-2p)\}} + \frac{1}{4\{1-s(1-4p)\}}, \quad P_{22}(s) = \frac{1}{2(1-s)} + \frac{1}{2\{1-s(1-4p)\}}.$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση $F_{ii}(s) = 1 - P_{ii}(s)^{-1}$, μετά από κάποιους απλούς υπολογισμούς, μπορούμε να βρούμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς $\tau_i = F_{ii}^{'}(1) : \tau_1 = \tau_3 = 4, \tau_2 = 2$.

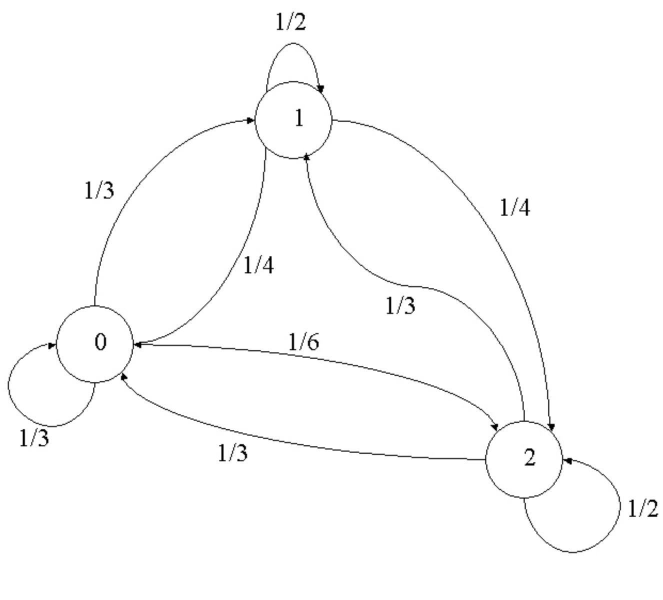
Λύση Άσκησης 2.5.:

(i) Κάθε κατάσταση της αλυσίδας είναι περιοδική περιόδου 2 (όταν $p \neq 0$) και όλες οι καταστάσεις είναι μη μηδενικά (θετικά) επαναφερόμενες.

Λύση Άσκησης 2.6.:

(i) Χώρος καταστάσεων $\{0, 1, 2\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Υπολογισμός στάσιμης κατανομής $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)^T, \pi = \pi P$:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} \\ \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 = \pi_0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \tag{2}$$

$$\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \tag{3}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
(2) - 2(1) &\Rightarrow \pi_1 = \tfrac{5}{3}\pi_0 \\
(1) &\Rightarrow \pi_2 = \tfrac{3}{2}\pi_0 \\
(4) &\Rightarrow \pi_0(1 + \tfrac{5}{3} + \tfrac{3}{2}) = 1 \Rightarrow \pi_0 = \tfrac{6}{25} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pi_1 = \tfrac{5}{3}\tfrac{6}{25} = \tfrac{2}{5} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pi_2 = \tfrac{3}{2}\tfrac{6}{25} = \tfrac{9}{25}.
\end{aligned}$$