

5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ανασκόπηση Θεωρίας Πιθανοτήτων

5.1. Πιθανότητες

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Το σύνολο Ω θα ονομάζεται *δειγματοχώρος* και οποιοδήποτε υποσύνολο του $A \subset \Omega$ θα ονομάζεται *γεγονός*. Ειδικότερα, το \emptyset ονομάζεται *απίθανο γεγονός* και όλο το Ω ονομάζεται *βέβαιο γεγονός*.

Ορισμός 5.43. Μια (μη κενή) συλλογή \mathcal{F} γεγονότων (υποσυνόλων του Ω) λέγεται ότι αποτελεί ένα σ -πεδίο (ή, αλλιώς, μια σ -άλγεβρα) στο Ω , αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε και $A^c \in \mathcal{F}$, όπου A^c συμβολίζει το *συμπλήρωμα* του A , δηλαδή, $A^c = \{s \in \Omega : s \notin A\}$.
- Αν $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, τότε και $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Προφανώς, από τις δυο πρώτες σχέσεις έπεται ότι και $\emptyset \in \mathcal{F}$. Επιπλέον, από τους νόμους του De Morgan, πέρα από τις ενώσεις, η τρίτη σχέση ισχύει και για τις τομές. Ακόμη, ας προσθέσουμε ότι τα $A \in \mathcal{F}$ συχνά ονομάζονται *μετρήσιμα γεγονότα*.

Μπορεί να αποδειχθεί (δείτε Cohn [3], σελ. 3) ότι, δοθέντος οποιουδήποτε συνόλου Ω και οποιασδήποτε συλλογής \mathcal{G} υποσυνόλων του Ω , υπάρχει πάντα ένα μικρότερο σ -πεδίο $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G})$, που περιέχει τη συλλογή \mathcal{G} . Έτσι, στην ειδική περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ή, γενικότερα, όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι ένας τοπολογικός χώρος), τότε υπάρχει το σ -πεδίο, που παράγεται από τη συλλογή των ανοικτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^d , το οποίο συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και ονομάζεται σ -πεδίο *Borel*. Επιπλέον, τα υποσύνολα του \mathbb{R}^d , που ανήκουν στο σ -πεδίο Borel, ονομάζονται *σύνολα Borel*.

Ορισμός 5.44. Μια συνάρτηση $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ονομάζεται *μέτρο πιθανότητας* στο Ω και λέμε ότι η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ αποτελεί ένα *χώρο πιθανότητας*, αν η μ ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$.
- Αν $A, B \in \mathcal{F}$ είναι ξένα γεγονότα (δηλαδή, $A \cap B = \emptyset$), τότε και $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Και γενικότερα, αν $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ είναι ανά δυο ξένα γεγονότα (δηλαδή, $A_i \cap A_j = \emptyset$, για κάθε $i \neq j$), τότε $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Παρατηρήστε πως μαζί οι (i) και (ii) συνεπάγονται ότι $\mu(\Omega) = 1$. Με άλλα λόγια, όταν $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, ορίζεται η *πιθανότητα* $\mu(A) \in [0, 1]$, για κάθε γεγονός $A \in \mathcal{F}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω σχέσεις. Συχνά, αντί για $\mu(A)$, θα συμβολίζουμε με $P(A)$ την πιθανότητα του γεγονότος $A \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 5.45. Έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και $A \in \mathcal{F}$. Λέμε ότι το γεγονός A συμβαίνει “*σχεδόν σίγουρα*” (“*almost sure*”) και συμβολίζουμε τον χαρακτηρισμό αυτό με “*σ.σ.*” (“*a.s.*”), αν ισχύει $P(A) = 1$.

Παράδειγμα 5.9. Ένα πρώτο και απλούστατο παράδειγμα πιθανότητας μπορεί να δοθεί για την περίπτωση ενός *διακριτού χώρου πιθανότητας*. Αυτή είναι η περίπτωση, που ο δειγματοχώρος Ω είναι αριθμησιμος (είτε πεπερασμένος ή αριθμήσιμα άπειρος), οπότε η συλλογή όλων των υποσυνόλων του Ω σχηματίζει ένα σ -πεδίο \mathcal{F} . Τότε, για κάθε γεγονός $A \subset \Omega$, ορίζεται η πιθανότητα

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

όπου η συνάρτηση $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $p(\omega) \geq 0$, για κάθε $\omega \in \Omega$, και $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Παράδειγμα 5.10. Ένα δεύτερο παράδειγμα πιθανότητας μπορεί να δοθεί για την περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}$. Θεωρώντας τότε το σ -πεδίο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των συνόλων Borel στον \mathbb{R} , μπορεί να αποδειχθεί (δείτε Cohn [3], σελ. 14-24) ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας λ ορισμένο στο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, που ονομάζεται μέτρο *Lebesgue*, το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\lambda((a, b]) = b - a$, για κάθε $a < b$.

Ορισμός 5.46. Έστω A, B δυο μετρήσιμα γεγονότα (δηλαδή, $A, B \in \mathcal{F}$) και $P(B) > 0$. Μπορούμε να ορίσουμε την υπό συνθήκη πιθανότητα του A δοθέντος του B , που τη συμβολίζουμε με $P(A|B)$, ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Πρόταση 5.22. (Ο Τύπος της Ολικής Πιθανότητας.) Για κάθε δυο γεγονότα $A, B \in \mathcal{F}$ με $0 < P(B) < 1$,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

Γενικότερα, αν έχουμε ένα διαμερισμό του Ω στα ανά δυο ξένα σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Ορισμός 5.47. Δυο μετρήσιμα γεγονότα A, B λέγεται ότι είναι ανεξάρτητα, αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Γενικότερα, μια πεπερασμένη συλλογή μετρησίμων γεγονότων A_1, \dots, A_k λέγεται ότι αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα, αν, για κάθε $m \leq k$ και κάθε $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, έχουμε

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \prod_{n=1}^m P(A_{i_n}).$$

Ακόμη πιο γενικώς, μια (αριθμήσιμα) άπειρη συλλογή μετρησίμων γεγονότων λέγεται ότι αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα, αν τα γεγονότα κάθε πεπερασμένης υποσυλλογής της είναι ανεξάρτητα.

5.2. Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.48. Έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) . Μια συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται τυχαία μεταβλητή, αν, για κάθε $B \subset \mathbb{R}$, που είναι σύνολο Borel (δηλαδή, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), έχουμε

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Επομένως, όταν η συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε επειδή, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το γεγονός $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq a\}$ είναι ένα σύνολο Borel, μπορεί να ορισθεί για το $\{X \leq a\}$ το μέτρο πιθανότητας του χώρου αυτού, δηλαδή, $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 5.11. Δοθέντος του μετρήσιμου γεγονότος A στο δειγματοχώρο Ω , η *χαρακτηριστική* (ή *δείκτρια*) *συνάρτηση* I_A του A είναι μια τυχαία μεταβλητή $I_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \omega \in A, \\ 0, & \text{όταν } \omega \notin A. \end{cases}$$

Ορισμός 5.49. Κάθε τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δημιουργεί ένα μέτρο πιθανότητας $\mu = \mu_X$ στο \mathbb{R} , το οποίο ονομάζεται *κατανομή* της τυχαίας μεταβλητής X (στο \mathbb{R}) και ορίζεται ως

$$\mu_X(A) = P(X \in A),$$

για κάθε A σύνολο Borel (δηλαδή, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), όπου (πάλι) $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A\}$.

Συνήθως, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ περιγράφεται μέσω της ονομαζόμενης *συνάρτησης κατανομής* $F = F_X$ της X (στο \mathbb{R}), η οποία είναι η συνάρτηση $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, που ορίζεται ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \mu_X((-\infty, x]), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 5.23. Η συνάρτηση κατανομής F έχει τις εξής ιδιότητες:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$
- για κάθε $x < y, F(x) \leq F(y),$
- η F είναι *συνεχής από δεξιά*, δηλαδή, $F(x+h) \rightarrow F(x),$ καθώς $h \downarrow 0.$

Επιπλέον, για κάθε $x, y \in \mathbb{R},$ η συνάρτηση κατανομής F ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

- $P(X > x) = 1 - F(x),$
- $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x),$
- $P(X = x) = F(x) - \lim_{y \uparrow x} F(y).$

5.3. Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.50. Η συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) ονομάζεται *διακριτή τυχαία μεταβλητή*, όταν το $X(\Omega)$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών, $X(\Omega) = \{x_i\}_{i=1,2,\dots},$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i = 1, 2, \dots,$ να έχουμε $\{X = x_i\} \in \mathcal{F}$ (όπου πάλι $\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = x_i\}$).

Άρα, όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι αριθμήσιμος, η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διακριτή.

Παράδειγμα 5.12. Δοθέντος του μετρήσιμου γεγονότος A στο δειγματοχώρο $\Omega,$ η χαρακτηριστική συνάρτηση I_A είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 5.51. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R},$ η οποία παίρνει τιμές στο αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών $X(\Omega) = \{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ (όπου υποθέτουμε πως τα x_i είναι διακριτοί αριθμοί). Τότε η συνάρτηση $f = f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$ που ορίζεται ως $f_X(x) = P(X = x),$ ονομάζεται *συνάρτηση μάζας* της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $X.$

Έτσι, για κάθε σύνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$, έχουμε

$$P(x \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i).$$

Οι συναρτήσεις κατανομής και μάζας F, f μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad f(x) = F(x) - \lim_{y \uparrow x} F(y).$$

Επομένως, η κατανομή μ_X της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X αναπαρίσταται από το διάνυσμα πιθανότητας $(\mu_i : i \text{ τέτοιο ώστε } x_i \in X(\Omega))$, όπου $\mu_i = f(x_i) = P(X = x_i)$, για κάθε i τέτοιο ώστε $x_i \in X(\Omega)$. Προφανώς, $\mu_i > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots$, και $\sum_{i: x_i \in X(\Omega)} \mu_i = 1$.

Παράδειγμα 5.13. Η κατανομή *Bernoulli*: Στην ειδικότερη περίπτωση της προηγούμενης, που η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ παίρνει μόνο δυο τιμές, ας πούμε, $X(\Omega) = \{0, 1\}$, λέμε ότι έχουμε μια δοκιμή *Bernoulli* και ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή *Bernoulli*. Τότε, η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ και η συνάρτηση μάζας $f(x) = P(X = x)$ δίνονται ως εξής:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0, \\ 1 - p, & \text{όταν } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{όταν } x \geq 1, \end{cases}$$

$$f(0) = 1 - p, \quad f(1) = p,$$

όπου $p = P(X = 1) > 0$ ονομάζεται *πιθανότητα επιτυχίας* της δοκιμής *Bernoulli* X (και $1 - p = P(X = 0)$).

Παράδειγμα 5.14. Η *διωνυμική κατανομή*: Έστω ότι έχουμε n ανεξάρτητες δοκιμές *Bernoulli* X_1, \dots, X_n , η κάθε μια από τις οποίες έχει πιθανότητα επιτυχίας $p > 0$. Υποθέτουμε ότι οι δοκιμές αυτές είναι (μεταξύ τους) ανεξάρτητες με την έννοια ότι, για κάθε δυο $X_i, X_j, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, τα γεγονότα $\{X_i = 0\}$ (ή $\{X_i = 1\}$) και $\{X_j = 0\}$ (ή $\{X_j = 1\}$) είναι (αντιστοίχως) ανεξάρτητα. Θεωρούμε, τότε, την τυχαία μεταβλητή $Y = X_1 + \dots + X_n$. Προφανώς, η Y είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, που παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, \dots, n\}$. Τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί τη *διωνυμική κατανομή* με παραμέτρους n και p , την οποία συνήθως συμβολίζουμε ως $\text{bin}(n, p)$. Με έναν απλό υπολογισμό, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση μάζας της Y είναι

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Παράδειγμα 5.15. Η κατανομή *Poisson*: Η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, που παίρνει τιμές στο σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots\}$ και έχει την εξής συνάρτηση μάζας

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

για κάποιο $\lambda > 0$, λέγεται ότι ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο λ .

Ορισμός 5.52. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και έστω $(\mu_k : k \text{ τέτοιο ώστε } x_k \in X(\Omega))$ το διάνυσμα πιθανότητας της X . Η μέση ή *αναμενόμενη τιμή*

$E(X)$ της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k: x_k \in X(\Omega)} k \mu_k = \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X = x), \end{aligned}$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Πρόταση 5.24. Έστω $f(x)$ η συνάρτηση μάζας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X και έστω η απεικόνιση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) f(x),$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Ορισμός 5.53. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή X και έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός k .

(i) Η k -οστή ροπή m_k και η k -οστή κεντρική ροπή σ_k της X ορίζονται αντιστοίχως ως:

$$\begin{aligned} m_k &= E(X^k) = \\ \sigma_k &= E((X - m_1)^k). \end{aligned}$$

(ii) Η μεταβλητότητα $\text{var}(X)$ της X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sigma_2 = E((X - E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - (E(|X|))^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.16. Για την κατανομή Bernoulli, $E(X) = p$ και $\text{var}(X) = p(1-p)$, για τη διωνυμική κατανομή $\text{bin}(n, p)$, $E(X) = np$ και $\text{var}(X) = np(1-p)$, και, για την κατανομή Poisson, $E(X) = \text{var}(X) = \lambda$.

5.4. Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.54. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) . Η X ονομάζεται *συνεχής τυχαία μεταβλητή*, αν η συνάρτηση κατανομής $F(x) = F_X(x) = P(X \leq x)$ είναι μια απολύτως συνεχής συνάρτηση, οπότε η F μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f = f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, που ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας* της τυχαίας μεταβλητής X . Φυσικά, αν η $F(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x , τότε $f(x) = F'(x)$.

Έτσι, για κάθε σύνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$, έχουμε

$$P(x \in A) = \int_A f(x) dx.$$

Ορισμός 5.55. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και έστω $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της X . Η μέση ή αναμενόμενη τιμή $E(X)$ της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Πρόταση 5.25. Έστω $f_X(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X και έστω η απεικόνιση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια ώστε η $g(X)$ να είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Ορισμός 5.56. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X και έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός k .

(i) Η k -οστή ροπή m_k και η k -οστή κεντρική ροπή σ_k της X ορίζονται αντιστοίχως ως:

$$\begin{aligned} m_k &= E(X^k) = \\ \sigma_k &= E((X - m_1)^k). \end{aligned}$$

(ii) Η μεταβλητότητα $\text{var}(X)$ της X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) = \sigma_2 &= E((X - E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - (E(|X|))^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.17. Η ομοιόμορφη κατανομή: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[a, b]$ ή ότι κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό, αν η συνάρτηση κατανομής της είναι η εξής:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{για } a < x \leq b, \\ 1, & \text{για } x > b. \end{cases}$$

Χοντρικά μπορούμε να πούμε ότι η ομοιόμορφη κατανομή παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ a και b με την ίδια πιθανότητα. Ακόμη, για την ομοιόμορφη κατανομή, $f(x) = (b-a)^{-1}$, $E(X) = (a+b)/2$ και $\text{var}(X) = (b-a)^2/12$.

Παράδειγμα 5.18. Η εκθετική κατανομή: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda (> 0)$ ή ότι κατανέμεται εκθετικά με την παράμετρο αυτή, αν η συνάρτηση κατανομής της είναι η εξής:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{για } x \geq 0.$$

Για την εκθετική κατανομή, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $E(X) = 1/\lambda$ και $\text{var}(X) = 1/\lambda^2$.

Παράδειγμα 5.19. Η κανονική κατανομή: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι κανονική με παράμετρους μ και σ^2 ή ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή ή κατανομή του Gauss με τις παραμέτρους αυτές, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι η εξής:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{για } -\infty < x < \infty.$$

Αυτή η κανονική κατανομή συμβολίζεται με $N(\mu, \sigma^2)$ και έχει $E(X) = \mu$ και $\text{var}(X) = \sigma^2$.

5.5. Εξάρτηση Τυχαίων Μεταβλητών και Υπό Συνθήκη Κατανομές

Ορισμός 5.57. Έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και δύο τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Οι X_1 και X_2 λέγονται ανεξάρτητες, αν, για κάθε δυο σύνολα Borel $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, τα γεγονότα $\{X_1 \in B_1\}$ και $\{X_2 \in B_2\}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι, για κάθε δυο τιμές $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

- τα γεγονότα $\{X_1 = x_1\}$ και $\{X_2 = x_2\}$ είναι ανεξάρτητα, όταν οι δυο τυχαίες μεταβλητές είναι διακριτές,
- τα γεγονότα $\{X_1 \leq x_1\}$ και $\{X_2 \leq x_2\}$ είναι ανεξάρτητα, όταν οι δυο τυχαίες μεταβλητές είναι συνεχείς.

Όπως και στην περίπτωση της ανεξαρτησίας των γεγονότων, ο ορισμός αυτός μπορεί αμέσως να γενικευθεί για οποιαδήποτε αριθμήσιμη συλλογή τυχαίων μεταβλητών.

Υπάρχει κι ένας έμμεσος τρόπος να μελετηθεί η ανεξαρτησία δυο τυχαίων μεταβλητών κι αυτός γίνεται μέσω της κοινής τους κατανομής, όπως εισάγεται στη συνέχεια.

Ορισμός 5.58. Δοθέντων δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , η *συνάρτηση κοινής κατανομής* τους $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ ορίζεται ως:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, αν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση κοινής μάζας* τους $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ ως:

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y), \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R},$$

ενώ, αν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση κοινής πυκνότητάς* τους $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ ως μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{v=-\infty}^y \int_{u=-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) du dv, \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς, αν η $F_{X,Y}$ είναι αρκετά διαφορίσιμη, τότε $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$.

Πρόταση 5.26. Οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνον αν

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

όπου $f_X(x), f_Y(y)$ είναι οι συναρτήσεις μάζας των X, Y (αντιστοίχως), όταν οι μεταβλητές αυτές είναι διακριτές, ή οι συναρτήσεις πυκνότητας, όταν είναι συνεχείς (εφόσον, βέβαια, υπάρχουν οι $f_{X,Y}(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ στη συνεχή περίπτωση).

Παράδειγμα 5.20. Η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή: Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ μια πεπερασμένη ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Λέμε ότι η X ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή $N(\mu, V)$, αν έχει κοινή συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |V|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \mu)V^{-1}(x - \mu)^T\right], \quad \text{για } x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου το διάνυσμα των μέσων τιμών $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ έχει σταθερές συνιστώσες και ο πίνακας της συνδιασποράς V είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας $n \times n$ (με ορίζουσα $|V|$).

Πρόταση 5.27. Έστω οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y και η απεικόνιση $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε και η $g(X, Y)$ να είναι τυχαία μεταβλητή. Τότε:

- όταν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κοινής μάζας $f_{X,Y}$,

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x,y \in \mathbb{R}} g(x, y) f_{X,Y}(x, y),$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως, και

- όταν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κοινής πυκνότητας $f_{X,Y}$,

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Ορισμός 5.59. Έστω X, Y δυο τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές $E(X), E(Y)$ και μεταβλητότες $\text{var}(X), \text{var}(Y)$ (αντιστοίχως).

- (i) Η συνδιασπορά (*covariance*) των X και Y , που συμβολίζεται με $\text{cov}(X, Y)$, ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) = \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Προφανώς, $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$.

- (ii) Ο συντελεστής συσχέτισης (ή, απλώς, η συσχέτιση) των X και Y , που συμβολίζεται με $\rho(X, Y)$, ορίζεται ως:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}},$$

εφόσον οι μεταβλητότες των δυο τυχαίων μεταβλητών δεν είναι μηδενικές. Στην περίπτωση $Y = X$, το $\rho(X, X)$ ονομάζεται συντελεστής αυτοσυσχέτισης της X .

- (iii) Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ονομάζονται ασυσχέτιστες, αν $\text{cov}(X, Y) = 0$ (ή $\rho(X, Y) = 0$).

Πρόταση 5.28. Αν οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε αυτές είναι και ασυσχέτιστες. Αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Ορισμός 5.60. Δοθέντων δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , η συνάρτηση υπό συνθήκης κατανομής της Y , όταν $X = x$, $F_{Y|X}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, ορίζεται ως:

$$F_{Y|X}(y | x) = P(Y \leq y | X = x), \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } P(X = x) > 0.$$

Επιπλέον, αν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η συνάρτηση υπό συνθήκης μάζας της Y , όταν $X = x$, $f_{Y|X}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, ως:

$$f_{Y|X}(y | x) = P(Y = y | X = x), \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } P(X = x) > 0,$$

ενώ, αν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η συνάρτηση υπό συνθήκης πυκνότητάς της Y , όταν $X = x$, $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, ως μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F_{Y|X}(y | x) = \int_{v=-\infty}^y f_{Y|X}(y | u) du, \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } f_X(x) > 0.$$

Επομένως,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } f_X(x) > 0.$$

Θεώρημα 5.49. *Η υπό συνθήκη μέση (ή αναμενόμενη) τιμή της Y , όταν $X = x$, $E(Y|X)$, είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση (ή αναμενόμενη) τιμή*

$$E(E(Y|X)) = E(Y).$$

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναφορές

- [1] Brémaud, Pierre. *Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [2] Brzeźniak, Zdzisław, and Zastawniak, Tomasz. *Basic Stochastic Processes*. Springer-Verlag, London, 1999.
- [3] Cohn, Donald L. *Measure Theory*. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [4] Chung, Kai Lai. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [5] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I. Third Edition. John Wiley, New York, 1968.
- [6] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II. Second Edition. John Wiley, New York, 1971.
- [7] Grimmett, Geoffrey, and Stirzaker, David. *Probability and Random Processes*. Third Edition. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [8] Hoel, Paul G., Port, Sidney C., and Stone, Charles J. *Introduction to Stochastic Processes*. Waveland Press, Long Grove, IL, 1987.
- [9] Kleinrock, Leonard. *Queueing Systems. Volume I: Theory*. John Wiley, New York, 1975.