5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ανασκόπηση Θεωρίας Πιθανοτήτων

5.1. Πιθανότητες

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Το σύνολο Ω θα ονομάζεται *δειγματοχώρος* και οποιοδήποτε υποσύνολό του $A \subset \Omega$ θα ονομάζεται *γεγονός*. Ειδικότερα, το $\varnothing$ ονομάζεται *απίθανο γεγονός* και όλο το Ω ονομάζεται *βέβαιο γεγονός*.

Ορισμός 5.43. Μια (μη κενή) συλλογή $\mathcal{F}$ γεγονότων (υποσυνόλων του Ω) λέγεται ότι αποτελεί ένα *σ-πεδίο* (ή, αλλιώς, μια *σ-άλγεβρα*) στο Ω, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε και $A^c \in \mathcal{F}$, όπου A^c συμβολίζει το *συμπλήρωμα* του A, δηλαδή, $A^c = \{s \in \Omega\colon s \notin A\}$.
- Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, τότε και $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Προφανώς, από τις δυο πρώτες σχέσεις έπεται ότι και $\varnothing \in \mathcal{F}$. Επιπλέον, από τους νόμους του De Morgan, πέρα από τις ενώσεις, η τρίτη σχέση ισχύει και για τις τομές. Ακόμη, ας προσθέσουμε ότι τα $A \in \mathcal{F}$ συχνά ονομάζονται *μετρήσιμα γεγονότα*.

Μπορεί να αποδειχθεί (δείτε Cohn [3], σελ. 3) ότι, δοθέντος οποιουδήποτε συνόλου Ω και οποιασδήποτε συλλογής $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω, υπάρχει πάντα ένα μικρότερο σ-πεδίο $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G})$, που περιέχει τη συλλογή $\mathcal{G}$. Έτσι, στην ειδική περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^d$ (ή, γενικότερα, όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι ένας τοπολογικός χώρος), τότε υπάρχει το σ-πεδίο, που παράγεται από τη συλλογή των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, το οποίο συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και ονομάζεται *σ-πεδίο Borel*. Επιπλέον, τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, που ανήκουν στο σ-πεδίο Borel, ονομάζονται *σύνολα Borel*.

Ορισμός 5.44. Μια συνάρτηση $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ ονομάζεται *μέτρο πιθανότητας* στο Ω και λέμε ότι η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ αποτελεί ένα *χώρο πιθανότητας*, αν η μ ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{F}$ είναι ξένα γεγονότα (δηλαδή, $A \cap B = \varnothing$), τότε και $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Και γενικότερα, αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ είναι ανά δυο ξένα γεγονότα (δηλαδή, $A_i \cap Aj = \varnothing$, για κάθε $i \neq j$), τότε $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

Παρατηρήστε πως μαζί οι (i) και (ii) συνεπάγονται ότι $\mu(\Omega) = 1$. Με άλλα λόγια, όταν $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, ορίζεται η *πιθανότητα* $\mu(A) \in [0,1]$, για κάθε γεγονός $A \in \mathcal{F}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω σχέσεις. Συχνά, αντί για $\mu(A)$, θα συμβολίζουμε με $P(A)$ την πιθανότητα του γεγονότος $A \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 5.45. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $A \in \mathcal{F}$. Λέμε ότι το γεγονός A συμβαίνει "*σχεδόν σίγουρα*" ("*almost sure*") και συμβολίζουμε τον χαρακτηρισμό αυτό με "*σ.σ.*" ("*a.s.*"), αν ισχύει $P(A) = 1$.

Παράδειγμα 5.9. Ένα πρώτο και απλούστατο παράδειγμα πιθανότητας μπορεί να δοθεί για την περίπτωση ενός *διακριτού χώρου πιθανότητας*. Αυτή είναι η περίπτωση, που ο δειγματοχώρος Ω είναι αριθμήσιμος (είτε πεπερασμένος ή αριθμήσιμα άπειρος), οπότε η συλλογή όλων των υποσυνόλων του Ω σχηματίζει ένα σ-πεδίο $\mathcal{F}$. Τότε, για κάθε γεγονός $A \subset \Omega$, ορίζεται η πιθανότητα

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

όπου η συνάρτηση $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $p(\omega) \geq 0$, για κάθε $\omega \in \Omega$, και $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Παράδειγμα 5.10. Ένα δεύτερο παράδειγμα πιθανότητας μπορεί να δοθεί για την περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}$. Θεωρώντας τότε το σ-πεδίο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των συνόλων Borel στον $\mathbb{R}$, μπορεί να αποδειχθεί (δείτε Cohn [3], σελ. 14-24) ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας λ ορισμένο στο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, που ονομάζεται *μέτρο Lebesgue*, το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\lambda((a, b]) = b - a$, για κάθε $a < b$.

Ορισμός 5.46. Έστω A, B δυο μετρήσιμα γεγονότα (δηλαδή, $A, B \in \mathcal{F}$) και $P(B) > 0$. Μπορούμε να ορίσουμε την *υπό συνθήκη πιθανότητα του A δοθέντος του B*, που τη συμβολίζουμε με $P(A|B)$, ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Πρόταση 5.22. (Ο Τύπος της Ολικής Πιθανότητας.) *Για κάθε δυο γεγονότα $A, B \in \mathcal{F}$ με $0 < P(B) < 1$,*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

Γενικότερα, αν έχουμε ένα διαμερισμό του Ω στα ανά δυο ξένα σύνολα $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Ορισμός 5.47. Δυο μετρήσιμα γεγονότα A, B λέγεται ότι είναι *ανεξάρτητα*, αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Γενικότερα, μια πεπερασμένη συλλογή μετρησίμων γεγονότων $A_1, \ldots, A_k$ λέγεται ότι αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα, αν, για κάθε $m \leq k$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}$ με $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, έχουμε

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = \prod_{n=1}^{m} P(A_{i_n}).$$

Ακόμη πιο γενικώς, μια (αριθμήσιμα) άπειρη συλλογή μετρήσιμων γεγονότων λέγεται ότι αποτελείται από ανεξάρτητα γεγονότα, αν τα γεγονότα κάθε πεπερασμένης υποσυλλογής της είναι ανεξάρτητα.

5.2. Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.48. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Μια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *τυχαία μεταβλητή*, αν, για κάθε $B \subset \mathbb{R}$, που είναι σύνολο Borel (δηλαδή, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), έχουμε

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Επομένως, όταν η συνάρτηση $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε επειδή, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το γεγονός $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq a\}$ είναι ένα σύνολο Borel, μπορεί να ορισθεί για το $\{X \leq a\}$ το μέτρο πιθανότητας του χώρου αυτού, δηλαδή, $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 5.11. Δοθέντος του μετρήσιμου γεγονότος A στο δειγματοχώρο Ω, η *χαρακτηριστική (ή δείκτρια) συνάρτηση* I_A του A είναι μια τυχαία μεταβλητή $I_A\colon \Omega \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \omega \in A, \\ 0, & \text{όταν } \omega \notin A. \end{cases}$$

Ορισμός 5.49. Κάθε τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ δημιουργεί ένα μέτρο πιθανότητας $\mu = \mu_X$ στο $\mathbb{R}$, το οποίο ονομάζεται *κατανομή* της τυχαίας μεταβλητής X (στο $\mathbb{R}$) και ορίζεται ως

$$\mu_X(A) = P(X \in A),$$

για κάθε A σύνολο Borel (δηλαδή, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), όπου (πάλι) $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\}$.

Συνήθως, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \to \mathbb{R}$ περιγράφεται μέσω της ονομαζόμενης *συνάρτησης κατανομής* $F = F_X$ της X (στο $\mathbb{R}$), η οποία είναι η συνάρτηση $F_X\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, που ορίζεται ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \mu_X((-\infty, x]), \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 5.23. *Η συνάρτηση κατανομής F έχει τις εξής ιδιότητες:*

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
- *για κάθε $x < y$, $F(x) \leq F(y)$,*
- *η F είναι συνεχής από δεξιά, δηλαδή, $F(x + h) \to F(x)$, καθώς $h \downarrow 0$.*

Επιπλέον, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση κατανομής F ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

- $P(X > x) = 1 - F(x)$,
- $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$,
- $P(X = x) = F(x) - \lim_{y\uparrow x} F(y)$.

5.3. Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.50. Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ονομάζεται *διακριτή τυχαία μεταβλητή*, όταν το $X(\Omega)$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών, $X(\Omega) = \{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$, τέτοιο ώστε, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, να έχουμε $\{X = x_i\} \in \mathcal{F}$ (όπου πάλι $\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x_i\}$).

Άρα, όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι αριθμήσιμος, η τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ είναι διακριτή.

Παράδειγμα 5.12. Δοθέντος του μετρήσιμου γεγονότος A στο δειγματοχώρο Ω, η χαρακτηριστική συνάρτηση I_A είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 5.51. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, η οποία παίρνει τιμές στο αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών $X(\Omega) = \{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$ (όπου υποθέτουμε πως τα x_i είναι διακριτοί αριθμοί). Τότε η συνάρτηση $f = f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, που ορίζεται ως $f_X(x) = P(X = x)$, ονομάζεται *συνάρτηση μάζας* της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X.

Έτσι, για κάθε σύνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$, έχουμε

$$P(x \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i).$$

Οι συναρτήσεις κατανομής και μάζας F, f μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \;\; f(x) = F(x) - \lim_{y \uparrow x} F(y).$$

Επομένως, η κατανομή μ_X της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X αναπαρίσταται από το *διάνυσμα πιθανότητας* $(\mu_i : i$ τέτοιο ώστε $x_i \in X(\Omega))$, όπου $\mu_i = f(x_i) = P(X = x_i)$, για κάθε i τέτοιο ώστε $x_i \in X(\Omega)$. Προφανώς, $\mu_i > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, και $\sum_{i:\, x_i \in X(\Omega)} \mu_i = 1$.

Παράδειγμα 5.13. *Η κατανομή Bernoulli*: Στην ειδικότερη περίπτωση της προηγουμένης, που η τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ παίρνει μόνο δυο τιμές, ας πούμε, $X(\Omega) = \{0, 1\}$, λέμε ότι έχουμε μια *δοκιμή Bernoulli* και ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την *κατανομή Bernoulli*. Τότε, η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ και η συνάρτηση μάζας $f(x) = P(X = x)$ δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0, \\ 1-p, & \text{όταν } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{όταν } x \geq 1, \end{cases} \\ f(0) &= 1-p, \qquad f(1) = p, \end{aligned}$$

όπου $p = P(X = 1) > 0$ ονομάζεται *πιθανότητα επιτυχίας* της δοκιμής Bernoulli X (και $1 - p = P(X = 0)$).

Παράδειγμα 5.14. *Η διωνυμική κατανομή*: Έστω ότι έχουμε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli $X_1, \ldots, X_n$, η κάθε μια από τις οποίες έχει πιθανότητα επιτυχίας $p > 0$. Υποθέτουμε ότι οι δοκιμές αυτές είναι (μεταξύ τους) ανεξάρτητες με την έννοια ότι, για κάθε δυο $X_i, X_j, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$, τα γεγονότα $\{X_i = 0\}$ (ή $\{X_i = 1\}$) και $\{X_j = 0\}$ (ή $\{X_j = 1\}$) είναι (αντιστοίχως) ανεξάρτητα. Θεωρούμε, τότε, την τυχαία μεταβλητή $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Προφανώς, η Y είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, που παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, n\}$. Τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί τη *διωνυμική κατανομή* με παραμέτρους n και p, την οποία συνήθως συμβολίζουμε ως $\mathrm{bin}(n, p)$. Με έναν απλό υπολογισμό, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση μάζας της Y είναι

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 5.15. *Η κατανομή Poisson*: Η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, που παίρνει τιμές στο σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και έχει την εξής συνάρτηση μάζας

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

για κάποιο $\lambda > 0$, λέγεται ότι ακολουθεί την *κατανομή Poisson* με παράμετρο λ.

Ορισμός 5.52. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $(\mu_k : k$ τέτοιο ώστε $x_k \in X(\Omega))$ το διάνυσμα πιθανότητας της X. Η *μέση ή αναμενόμενη τιμή*

$E(X)$ της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k:\, x_k \in X(\Omega)} k\mu_k = \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xP(X=x), \end{aligned}$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Πρόταση 5.24. *Έστω $f(x)$ η συνάρτηση μάζας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X και έστω η απεικόνιση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε*

$$E(g(X)) = \sum_{x\in\mathbb{R}} g(x)f(x),$$

εφόσον το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Ορισμός 5.53. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή X και έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός k.

(i) Η *k-οστή ροπή* m_k και η *k-οστή κεντρική ροπή* σ_k της X ορίζονται αντιστοίχως ως:

$$\begin{aligned} m_k &= E(X^k) = \\ \sigma_k &= E((X-m_1)^k). \end{aligned}$$

(ii) Η *μεταβλητότητα* $\mathrm{var}(X)$ της X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) = \sigma_2 &= E((X-E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - (E(|X|))^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.16. Για την κατανομή Bernoulli, $E(X) = p$ και $\mathrm{var}(X) = p(1-p)$, για τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{bin}(n,p)$, $E(X) = np$ και $\mathrm{var}(X) = np(1-p)$, και, για την κατανομή Poisson, $E(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda$.

5.4. Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 5.54. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η X ονομάζεται *συνεχής τυχαία μεταβλητή*, αν η συνάρτηση κατανομής $F(x) = F_X(x) = P(X \le x)$ είναι μια απολύτως συνεχής συνάρτηση, οπότε η F μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \ \ x \in \mathbb{R},$$

για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f = f_X\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, που ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας* της τυχαίας μεταβλητής X. Φυσικά, αν η $F(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x, τότε $f(x) = F'(x)$.

Έτσι, για κάθε σύνολο Borel $A \subset \mathbb{R}$, έχουμε

$$P(x \in A) = \int_A f(x)\,dx.$$

Ορισμός 5.55. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της X. Η *μέση ή αναμενόμενη τιμή* $E(X)$ της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Πρόταση 5.25. *Έστω $f_X(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X και έστω η απεικόνιση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι τέτοια ώστε η $g(X)$ να είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx,$$

εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Ορισμός 5.56. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X και έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός k.

(i) Η *k-οστή ροπή* m_k και η *k-οστή κεντρική ροπή* σ_k της X ορίζονται αντιστοίχως ως:

$$\begin{aligned} m_k &= E(X^k) = \\ \sigma_k &= E((X - m_1)^k). \end{aligned}$$

(ii) Η *μεταβλητότητα* $\operatorname{var}(X)$ της X ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) = \sigma_2 &= E((X - E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - (E(|X|))^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.17. *Η ομοιόμορφη κατανομή*: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι *ομοιόμορφη* στο διάστημα $[a, b]$ ή ότι *κατανέμεται ομοιόρφα* στο διάστημα αυτό, αν η συνάρτηση κατανομής της είναι η εξής:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{για } a < x \le b, \\ 1, & \text{για } x > b. \end{cases}$$

Χοντρικά μπορούμε να πούμε ότι η ομοιόμορφη κατανομή παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ a και b με την ίδια πιθανότητα. Ακόμη, για την ομοιόμορφη κατανομή, $f(x) = (b-a)^{-1}, E(X) = (a+b)/2$ και $\operatorname{var}(X) = (b-a)^2/12$.

Παράδειγμα 5.18. *Η εκθετική κατανομή*: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι *εκθετική* με παράμετρο λ (> 0) ή ότι *κατανέμεται εκθετικά* με την παράμετρο αυτή, αν η συνάρτηση κατανομής της είναι η εξής:

$$F(x) = 1 - e^{\lambda x}, \quad \text{για } \ x \ge 0.$$

Για την εκθετική κατανομή, $f(x) = \lambda\, e^{\lambda x}, E(X) = 1/\lambda$ και $\operatorname{var}(X) = 1/\lambda^2$.

Παράδειγμα 5.19. *Η κανονική κατανομή*: Λέμε ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X είναι *κανονική* με παράμετρους μ και σ^2 ή ότι η X *ακολουθεί την κανονική κατανομή ή κατανομή του Gauss* με τις παραμέτρους αυτές, αν η συνάρτηση πυκνότητάς της είναι η εξής:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\biggl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\biggr), \quad \text{για } \ -\infty < x < \infty.$$

Αυτή η κανονική κατανομή συμβολίζεται με $N(\mu, \sigma^2)$ και έχει $E(X) = \mu$ και $\operatorname{var}(X) = \sigma^2$.

5.5. Εξάρτηση Τυχαίων Μεταβλητών και Υπό Συνθήκη Κατανομές

Ορισμός 5.57. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και δύο τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Οι X_1 και X_2 λέγονται ανεξάρτητες, αν, για κάθε δυο σύνολα Borel $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, τα γεγονότα $\{X_1 \in B_1\}$ και $\{X_2 \in B_2\}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι, για κάθε δυο τιμές $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

- τα γεγονότα $\{X_1 = x_1\}$ και $\{X_2 = x_2\}$ είναι ανεξάρτητα, όταν οι δυο τυχαίες μεταβλητές είναι διακριτές,
- τα γεγονότα $\{X_1 \leq x_1\}$ και $\{X_2 \leq x_2\}$ είναι ανεξάρτητα, όταν οι δυο τυχαίες μεταβλητές είναι συνεχείς.

Όπως και στην περίπτωση της ανεξαρτησίας των γεγονότων, ο ορισμός αυτός μπορεί αμέσως να γενικευθεί για οποιαδήποτε αριθμήσιμη συλλογή τυχαίων μεταβλητών.

Υπάρχει κι ένας έμμεσος τρόπος να μελετηθεί η ανεξαρτησία δυο τυχαίων μεταβλητών κι αυτός γίνεται μέσω της κοινής τους κατανομής, όπως εισάγεται στη συνέχεια.

Ορισμός 5.58. Δοθέντων δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, η *συνάρτηση κοινής κατανομής* τους $F_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ορίζεται ως:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, αν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση κοινής μάζας* τους $f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ως:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y), \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R},$$

ενώ, αν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση κοινής πυκνότητάς* τους $f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ ως μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{v=-\infty}^{y} \int_{u=-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv, \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς, αν η $F_{X,Y}$ είναι αρκετά διαφορίσιμη, τότε $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$.

Πρόταση 5.26. *Οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνον αν*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y),$$

όπου $f_X(x), f_Y(y)$ είναι οι συναρτήσεις μάζας των X, Y (αντιστοίχως), όταν οι μεταβλητές αυτές είναι διακριτές, ή οι συναρτήσεις πυκνότητας, όταν είναι συνεχείς (εφόσον, βέβαια, υπάρχουν οι $f_{X,Y}(x,y), f_X(x), f_Y(y)$ στη συνεχή περίπτωση).

Παράδειγμα 5.20. *Η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή*: Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ μια πεπερασμένη ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Λέμε ότι η X ακολουθεί την *πολυμεταβλητή κανονική κατανομή* $N(\mu, V)$, αν έχει κοινή συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |V|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)V^{-1}(x-\mu)^T\right], \quad \text{για } \ x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου το *διάνυσμα των μέσων τιμών* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ έχει σταθερές συνιστώσες και ο *πίνακας της συνδιασποράς* V είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας $n \times n$ (με ορίζουσα $|V|$).

Πρόταση 5.27. *Έστω οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y και η απεικόνιση $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε και η $g(X,Y)$ να είναι τυχαία μεταβλητή. Τότε:*

- *όταν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κοινής μάζας $f_{X,Y}$,*

$$E(g(X,Y)) = \sum_{x,y\in\mathbb{R}} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y),$$

  εφόσον το παραπάνω άθροισμα συκλίνει απολύτως, και

- *όταν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κοινής πυκνότητας $f_{X,Y}$,*

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy,$$

  εφόσον υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα.

Ορισμός 5.59. Έστω X, Y δυο τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές $E(X), E(Y)$ και μεταβλητότες $\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y)$ (αντιστοίχως).

(i) Η *συνδιασπορά* (*covariance*) των X και Y, που συμβολίζεται με $\mathrm{cov}(X,Y)$, ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) = \\ &= E(XY) - E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Προφανώς, $\mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X)$.

(ii) Ο *συντελεστής συσχέτισης* (ή, απλώς, η *συσχέτιση*) των X και Y, που συμβολίζεται με $\rho(X,Y)$, ορίζεται ως:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)}},$$

εφόσον οι μεταβλητότες των δυο τυχαίων μεταβλητών δεν είναι μηδενικές. Στην περίπτωση $Y = X$, το $\rho(X,X)$ ονομάζεται *συντελεστής αυτοσυσχέτισης* της X.

(iii) Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ονομάζονται *ασυσχέτιστες*, αν $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ (ή $\rho(X,Y) = 0$).

Πρόταση 5.28. *Αν οι δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε αυτές είναι και ασυσχέτιστες. Αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.*

Ορισμός 5.60. Δοθέντων δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, η *συνάρτηση υπό συνθήκης κατανομής της Y, όταν $X = x$*, $F_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, ορίζεται ως:

$$F_{Y|X}(y\,|\,x) = P(Y \le y\,|\,X = x), \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } P(X = x) > 0.$$

Επιπλέον, αν οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση υπό συνθήκης μάζας της Y, όταν $X = x$*, $f_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, ως:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = P(Y = y\,|\,X = x), \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } P(X = x) > 0,$$

ενώ, αν οι X και Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, μπορεί να ορισθεί και η *συνάρτηση υπό συνθήκης πυκνότητάς της Y, όταν $X = x$*, $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, ως μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F_{Y|X}(y\,|\,x) = \int_{v=-\infty}^{y} f_{Y|X}(y\,|\,u)\; du, \text{ για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } f_X(x) > 0.$$

Επομένως,

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)},\ \text{για } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } x \text{ τέτοιο ώστε } f_X(x) > 0.$$

Θεώρημα 5.49. *Η υπό συνθήκη μέση (ή αναμενόμενη) τιμή της Y, όταν $X = x$, $E(Y\,|\,X)$, είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση (ή αναμενόμενη) τιμή*

$$E(E(Y\,|\,X)) = E(Y).$$

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναφορές

[1] Brémaud, Pierre. *Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] Brzeźniak, Zdzisław, and Zastawniak, Tomasz. *Basic Stochastic Processes.* Springer-Verlag, London, 1999.

[3] Cohn, Donald L. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] Chung, Kai Lai. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities.* Second Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[5] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I. Third Edition. John Wiley, New York, 1968.

[6] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II. Second Edition. John Wiley, New York, 1971.

[7] Grimmett, Geoffrey, and Stirzaker, David. *Probability and Random Processes.* Third Edition. Oxford University Press, Oxford, 2001.

[8] Hoel, Paul G., Port, Sidney C., and Stone, Charles J. *Introduction to Stochastic Processes.* Waveland Press, Long Grove, IL, 1987.

[9] Kleinrock, Leonard. *Queueing Systems. Volume I: Theory.* John Wiley, New York, 1975.