Γ. Κορίλη, "Αλυσίδες Markov"

http://www.seas.upenn.edu/~tcom501/Lectures/Lecture3.pdf

- Αλυσίδες Markov
- Αλυσίδες Markov Διακριτού Χρόνου
- Υπολογισμός Στάσιμης Κατανομής
- Εξισώσεις Ολικού Ισοζυγίου
- Εξισώσεις Λεπτομερούς Ισοζυγίου
- Διαδικασία Γεννήσεων-Θανάτων
- Γενικευμένες Αλυσίδες Markov
- Αλυσίδες Markov Συνεχούς Χρόνου

Αλυσίδες Markov

- Μια στοχαστική διαδικασία που παίρνει τιμές σε ένα αριθμήσιμο σύνολο
  - Παράδειγμα: {0,1,2,…,m} ή {0,1,2,…}
  - Τα στοιχεία του συνόλου αυτού είναι οι "καταστάσεις"
  - Η αλυσίδα "μεταπηδά" από κατάσταση σε κατάσταση
- Η ιδιότητα της Λήθης (του Markov): Δοθείσης της παρούσης κατάστασης, οι μελλοντικές μεταβάσεις της αλυσίδας είναι ανεξάρτητες του παρελθόντος
- Αλυσίδες Markov: διακριτού ή συνεχούς χρόνου

Αλυσίδες Markov Διακριτού Χρόνου

- Στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n: n = 0,1,2,\ldots\}$
- Παίρνει τιμές στο $\{0,1,2,\ldots\}$
- Ιδιότητα λήθης:

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

- Πιθανότητες μετάβασης P_{ij}

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$$

- Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $P=[P_{ij}]$

Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

- Πιθανότητες μετάβασης στο βήμα n

$$P_{ij}^{n} = P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}, \quad n, m \geq 0,\ i, j \geq 0$$

- Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}, \quad n, m \geq 0,\ i, j \geq 0$$

- P_{ij}^{n} είναι το στοιχείο (i, j) του πίνακα P^n
- Επαναληπτικός υπολογισμός των πιθανοτήτων *καταστάσεων*

Πιθανότητες Καταστάσεων – Στάσιμη Κατανομή

- Πιθανότητες καταστάσεων (χρονικά εξαρτώμενες)

$$\pi_j^n = P\{X_n = j\}, \qquad \pi^n = (\pi_0^n, \pi_1^n, \ldots)$$

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n-1} = i\} P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} \Rightarrow \pi_j^n = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{n-1} P_{ij}$$

Σε μορφή πίνακα:

$$\pi^n = \pi^{n-1} P = \pi^{n-2} P^2 = \ldots = \pi^0 P^n$$

- Αν η χρονικά εξαρτώμενη κατανομή συγκλίνει σε ένα όριο

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \pi^n$$

π ονομάζεται *στάσιμη κατανομή*

$$\pi = \pi P$$

- Η ύπαρξη εξαρτάται από τη δομή της αλυσίδας Markov

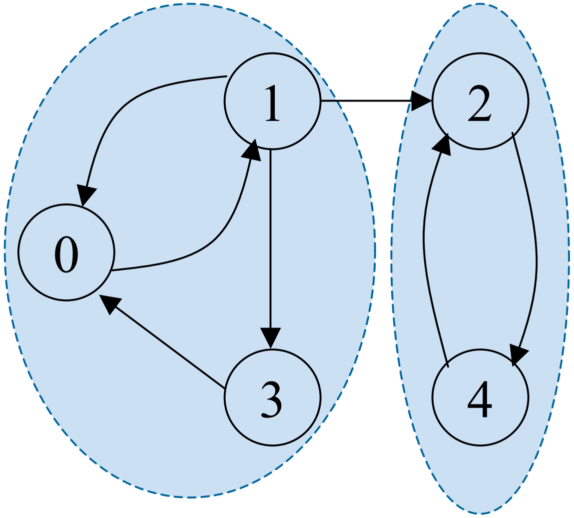
Ταξινόμηση Αλυσίδων Markov

Μη Αναγώγιμες:

- Οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν:

$$\exists n,m: \; P_{ij}^{n} > 0, P_{ji}^{m} > 0$$

- Μη Αναγώγιμες Αλυσίδες Markov: όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν

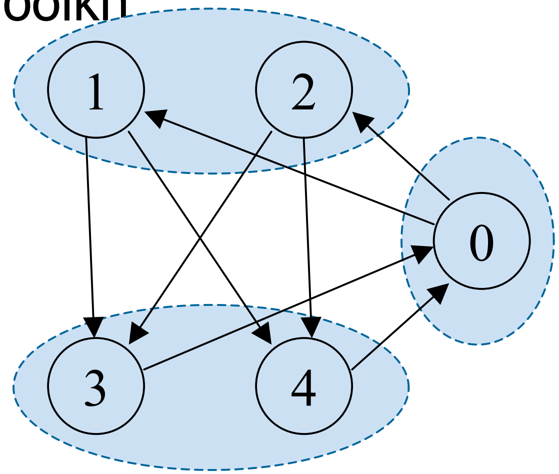


Απεριοδικές:

- Η κατάσταση i είναι περιοδική:

$$\exists \, d > 1: \; P_{ii}^{n} > 0 \Rightarrow n = \alpha d$$

- Απεριοδικές Αλυσίδες Markov: καμιά κατάσταση δεν είναι περιοδική



Οριακά Θεωρήματα

Θεώρημα 1: Έστω μια μη αναγώγιμη & απεριοδική αλυσίδα Markov

- Τότε, για κάθε κατάσταση j, το παρακάτω όριο

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

υπάρχει κι είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης i

$$P\left\{\pi_j = \lim_{k\to\infty} \frac{N_j(k)}{k} \mid X_0 = i\right\} = 1$$

- $N_j(k)$: ο αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση j ως το χρόνο k
- π_j: η συχνότητα επισκέψεων στην κατάσταση j

Ύπαρξη Στάσιμης Κατανομής

Θεώρημα 2: Έστω μη αναγώγιμη κι απεριοδική αλυσίδα Markov. Τότε υπάρχουν δυο δυνατότητες:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$$

1. Είτε $\pi_j = 0$, για όλες τις καταστάσεις j ➡ δεν υπάρχει καμιά στάσιμη κατανομή
2. Είτε $\pi_j > 0$, για όλες τις καταστάσεις j ➡ π είναι η *μοναδική* στάσιμη κατανομή

Παρατήρηση: Αν ο αριθμός των καταστάσεων είναι πεπερασμένος, η περίπτωση 2 είναι η μοναδική.

Εργοδικές Αλυσίδες Markov

- Έστω μια αλυσίδα Markov με στάσιμη κατανομή

$$\pi_j > 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

- Οι καταστάσεις είναι θετικά επαναφερόμενες: Η διαδικασία επιστρέφει στην κατάσταση j "άπειρες φορές συχνά"
- Μια θετικά επαναφερόμενη και απεριοδική αλυσίδα Markov ονομάζεται εργοδική
- Μια εργοδική αλυσίδα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^n$$

➤ Εργοδικότητα ⇒ Χρονικές Μέσοι Όροι = Στοχαστικοί Μέσοι Όροι

Υπολογισμός Στάσιμης Κατανομής

Α. Πεπερασμένο Πλήθος Καταστάσεων

- Λύνουμε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{m} \pi_i P_{ij}, \quad j = 0,1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1$$

- Ή υπολογίζουμε αριθμητικό το όριο της P^n που συγκλίνει σε ένα πίνακα με γραμμές ίσες προς π
- Κανένα πρόβλημα για μικρό αριθμό καταστάσεων

Β. Άπειρο Πλήθος Καταστάσεων

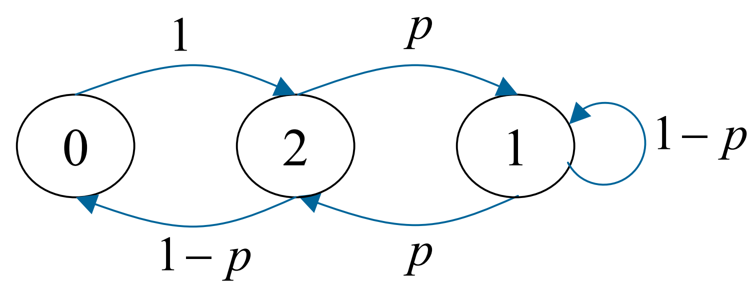
- Δεν μπορούν να εφαρμοσθούν τα προηγούμενα για άπειρες διαστάσεις
- Προσπαθούμε να βρούμε τις λύσεις του προβλήματος:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad j = 0,1,\ldots,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

Παράδειγμα: Πεπερασμένη Αλυσίδα Markov

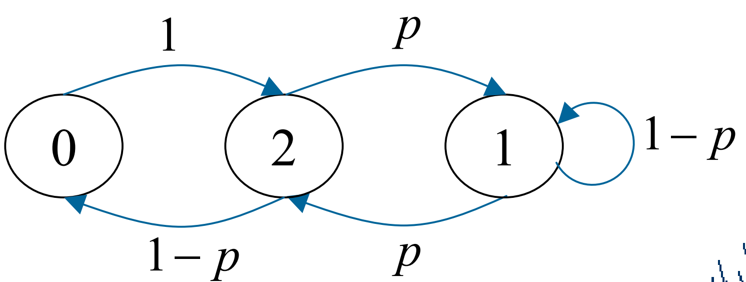
Ένας αφηρημένος καθηγητής χρησιμοποιεί δυο ομπρέλες όταν πάει από το σπίτι στο γραφείο και πίσω. Αν βρέχει κι υπάρχει διαθέσιμη ομπρέλα, την παίρνει. Αν δεν βρέχει, πάντα παραλείπει να πάρει ομπρέλα. Έστω p η πιθανότητα να βρέξει όταν ο καθηγητής φεύγει. Ποια είναι η πιθανότητα ο καθηγητής να βραχεί μια μέρα;



- Διατύπωση με αλυσίδα Markov
- i είναι ο αριθμός των ομπρελών που είναι διαθέσιμες
- Πίνακας μεταβάσεων

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Πεπερασμένη Αλυσίδα Markov (συνέχεια)



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = (1-p)\pi_2 \\ \pi_1 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \\ \pi_2 = \pi_0 + p\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \pi_0 = \frac{1-p}{3-p}, \pi_1 = \frac{1}{3-p}, \pi_2 = \frac{1}{3-p}$$

$$P\{\text{gets wet}\} = \pi_0 p = p\frac{1-p}{3-p}$$

Παράδειγμα: Πεπερασμένη Αλυσίδα Markov (συνέχεια)

- Παίρνοντας $p = 0.1$:

$$\pi = \left(\frac{1-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right) = (0.310, 0.345, 0.345)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Αριθμητικός υπολογισμός του ορίου του P^n

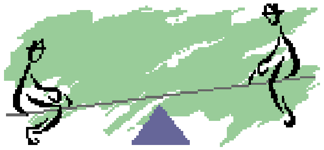
$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0.310 & 0.345 & 0.345 \\ 0.310 & 0.345 & 0.345 \\ 0.310 & 0.345 & 0.345 \end{bmatrix} \quad (n \approx 150)$$

- Η επιλυσιμότητα εξαρτάται από τη δομή του P

Εξισώσεις Ολικού Ισοζυγίου

- Έστω αλυσίδα Markov με άπειρο πλήθος καταστάσεων
- Εξισώσεις Ολικού Ισοζυγίου (ΕΟΙ)

$$\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \Leftrightarrow \pi_j \sum_{i \neq j} P_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i P_{ij}, \quad j \geq 0$$



- $\pi_j P_{ji}$ είναι η συχνότητα των μεταβάσεων από j σε i

$$\begin{pmatrix} \text{Frequency of} \\ \text{transitions out of } j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Frequency of} \\ \text{transitions into } j \end{pmatrix}$$

- Διαίσθηση: οι επισκέψεις στην j γίνονται άπειρα συχνά. Για κάθε μετάβαση που ξεκινά από τη j πρέπει να υπάρχει μια επόμενη μετάβαση που επιστρέφει στη j με πιθανότητα 1

Εξισώσεις Ολικού Ισοζυγίου (συνέχεια)

- Εναλλακτική μορφή των ΕΟΙ

$$\sum_{j\in S}\pi_j\sum_{i\notin S}P_{ji}=\sum_{i\notin S}\pi_i\sum_{j\in S}P_{ij},\quad S\subseteq\{0,1,2,\dots\}$$

- Αν μια κατανομή πιθανοτήτων ικανοποιεί τις ΕΟΙ, τότε είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή της αλυσίδας Markov
- Εύρεση της στάσιμης κατανομής:
  - Υποθέτουμε ποια είναι η κατανομή από τις ιδιότητες του συστήματος
  - Επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί τις ΕΟΙ
  - ☺ Αλυσίδες Markov με ειδική δομή απλουστεύουν το πρόβλημα

Εξισώσεις Ολικού Ισοζυγίου – Απόδειξη

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \;\; \& \;\; \sum_{i=0}^{\infty} P_{ji} = 1 \;\; \Rightarrow$$

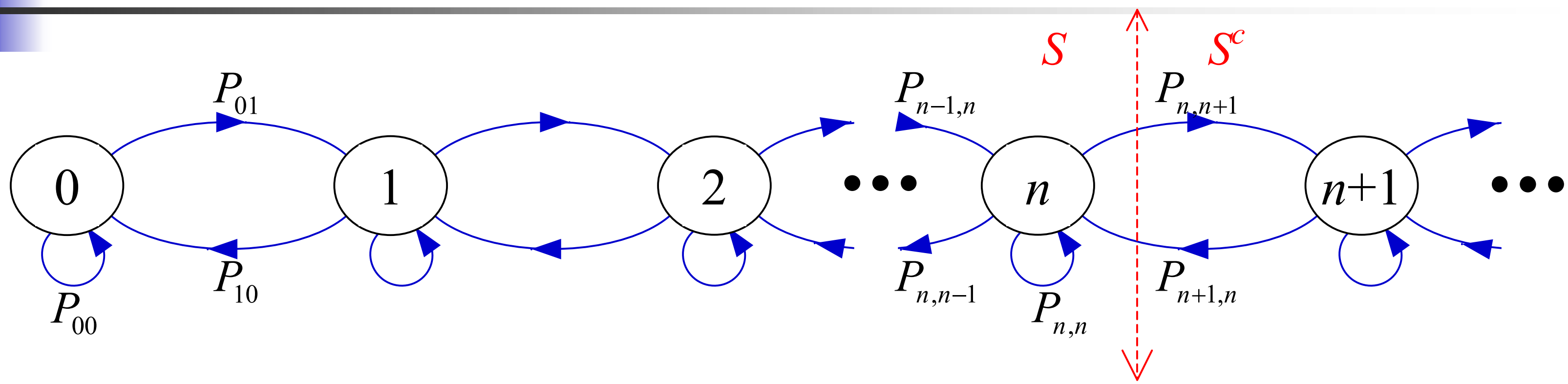
$$\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \;\; \Leftrightarrow \;\; \pi_j \sum_{i \neq j} P_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i P_{ij}$$

$$\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \Rightarrow \sum_{j \in S} \pi_j \sum_{i=0}^{\infty} P_{ji} = \sum_{j \in S} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{j \in S} \pi_j \left(\sum_{i \in S} P_{ji} + \sum_{i \notin S} P_{ji} \right) = \sum_{j \in S} \left(\sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} + \sum_{i \notin S} \pi_i P_{ij} \right) \Rightarrow$$

$$\sum_{j \in S} \pi_j \sum_{i \notin S} P_{ji} = \sum_{i \notin S} \pi_i \sum_{j \in S} P_{ij}$$

Διαδικασία Γέννησης-Θανάτου



- Μονο-διάστατη αλυσίδα Markov με μεταβάσεις μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων: $P_{ij}=0$, αν $|i\text{-}j|>1$
- Εξισώσεις Λεπτομερούς Ισοζυγίου (ΕΛΙ)

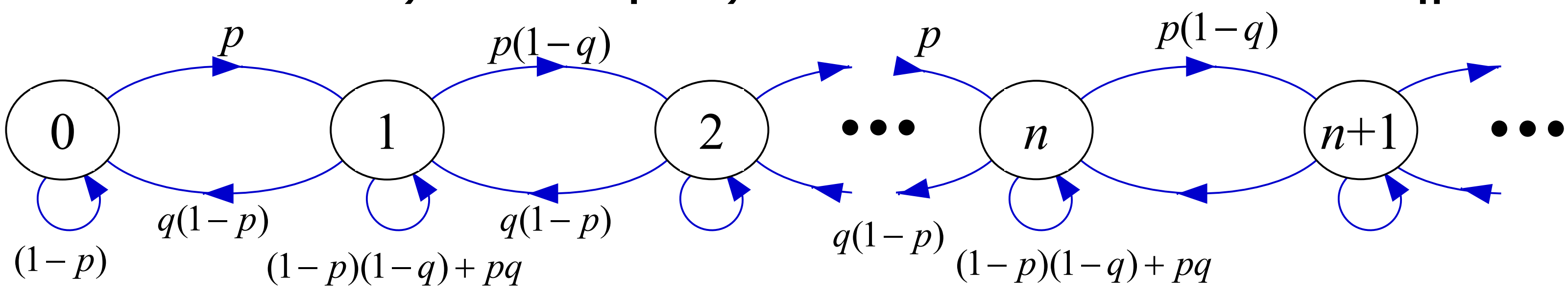
$$\pi_n P_{n,n+1} = \pi_{n+1} P_{n+1,n} \qquad n = 0,1,\ldots$$

- Απόδειξη: Οι ΕΟΙ με $S=\{0,1,\ldots,n\}$ δίνουν:

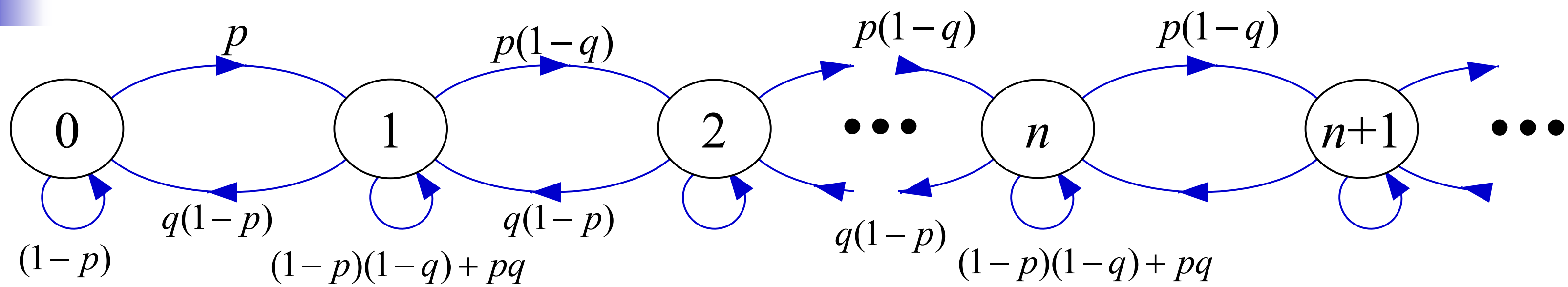
$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \pi_j P_{ji} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \pi_i P_{ij} \Rightarrow \pi_n P_{n,n+1} = \pi_{n+1} P_{n+1,n}$$

Παράδειγμα: Ουρά Διακριτού Χρόνου

- Σε κάθε χρόνο, είτε μια άφιξη με πιθανότητα p ή μηδέν αφίξεις με πιθανότητα $1\text{-}p$
- Σε κάθε χρόνο, ο εξυπηρετούμενος πελάτης είτε αναχωρεί με πιθανότητα q ή παραμένει με πιθανότητα $1\text{-}q$
- Ανεξάρτητες αφίξεις και χρόνοι εξυπηρέτησης
- Καταστάσεις: το πλήθος των πελατών στο σύστημα



Παράδειγμα: Ουρά Διακριτού Χρόνου (συνέχεια)



$$\pi_0 p = \pi_1 q(1-p) \Rightarrow \pi_1 = \frac{p/q}{1-p}\pi_0$$

$$\pi_n p(1-q) = \pi_{n+1} q(1-p) \Rightarrow \pi_{n+1} = \frac{p(1-q)}{q(1-p)}\pi_n, \quad n \geq 1$$

Define: $\rho \equiv p/q, \ \alpha \equiv \dfrac{p(1-q)}{q(1-p)}$

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\rho}{1-p}\pi_0 \\ \pi_{n+1} = \alpha\pi_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \ \pi_n = \alpha^{n-1}\frac{\rho}{1-p}\pi_0, \quad n \geq 1$$

Παράδειγμα: Ουρά Διακριτού Χρόνου (συνέχεια)

- Έχοντας προσδιορίσει την κατανομή σαν συνάρτηση του π_0

$$\pi_n = \alpha^{n-1} \frac{\rho}{1-p} \pi_0, \quad n \geq 1$$

- Πώς υπολογίζουμε τη σταθερά κανονικοποίησης π_0;
- Νόμος διατήρησης πιθανοτήτων:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \Rightarrow \pi_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{\rho}{(1-p)} \frac{1}{(1-\alpha)} \right]^{-1}$$

- Παρατηρώντας ότι

$$(1-p)(1-\alpha) = (1-p) \frac{q(1-p) - p(1-q)}{q(1-p)} = \frac{q-p}{q} = 1 - \rho$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \rho \\ \pi_n = \rho(1-\alpha)\alpha^{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

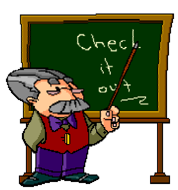
Εξισώσεις Λεπτομερούς Ισοζυγίου

- Γενική περίπτωση:

$$\pi_j P_{ji} = \pi_i P_{ij} \quad i, j = 0,1,...$$

- Συνεπάγονται τις ΕΛΙ
- Δεν ισχύουν υποχρεωτικά για κάθε αλυσίδα Markov
- Αλλά σημαντικά απλοποιούν τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής

<u>Μεθοδολογία:</u>



- Υποθέστε ότι ισχύουν οι ΕΛΙ – σε κάποια μορφή
- Λύστε το σύστημα των ΕΛΙ και της $\Sigma_i \pi_i = 1$
  - Αν το σύστημα δεν έχει λύση, τότε οι ΕΛΙ δεν ισχύουν
  - Αν το σύστημα έχει μια λύση $\{\pi_i: i=0,1,\ldots\}$, τότε αυτή είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή

Γενικευμένες Αλυσίδες Markov

- Έστω μια αλυσίδα Markov στο σύνολο καταστάσεων {0,1,…} τέτοια ώστε κάθε φορά που γίνεται μετάβαση στην κατάσταση i
  - Η επόμενη κατάσταση στην οποία θα γίνει μετάβαση είναι η j με πιθανότητα P_{ij}
  - Δοθέντος ότι η επόμενη κατάσταση στην οποία θα γίνει η μετάβαση είναι η j, ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση i μέχρις ότου γίνει η μετάβαση είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή F_{ij}
- $\{Z(t): t \geq 0\}$ περιγράφει την κατάσταση στην οποία η αλυσίδα βρίσκεται το χρόνο t: *Γενικευμένη Αλυσίδα Markov* ή *Διαδικασία Ημι-Markov*
- Δεν ικανοποιεί την ιδιότητα Markov: το μέλλον εξαρτάται από
  - Την παρούσα κατάσταση και
  - Το μήκος χρόνου κατά το οποίο η διαδικασία έχει παραμείνει στην παρούσα κατάσταση

Γενικευμένες Αλυσίδες Markov (συνέχεια)

- T_i: ο χρόνος που η διαδικασία δαπανά στην κατάσταση i, πριν γίνει η μετάβαση – χρόνος παραμονής
- Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του T_i

$$H_i(t) = P\{T_i \le t\} = \sum_{j=0}^{\infty} P\{T_i \le t \mid \text{next state } j\} P_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} F_{ij}(t) P_{ij}$$

$$E[T_i] = \int_0^{\infty} t \, dH_i(t)$$

- T_{ii}: χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μεταβάσεων στο i
- X_n είναι η $n^{\text{οστή}}$ κατάσταση που η διαδικασία έχει επισκεφθεί. $\{X_n: n=0,1,\ldots\}$
  - Είναι αλυσίδα Markov: εμφυτευμένη αλυσίδα Markov
  - Έχει πιθανότητες μετάβασης P_{ij}
- Μια γενικευμένη αλυσίδα Markov είναι μη αναγώγιμη: αν η αντίστοιχη εμφυτευμένη αλυσίδα Markov είναι μη αναγώγιμη

Οριακά Θεωρήματα (συνέχεια)

Θεώρημα 3: Έστω μη αναγώγιμη γενικευμένη αλυσίδα Markov με $\mathrm{E}[T_{ii}] < \infty$

- Για κάθε κατάσταση j, το παρακάτω όριο

$$p_j = \lim_{t\to\infty} P\{Z(t) = j \mid Z(0) = i\}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

υπάρχει κι είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης.

$$p_j = \frac{E[T_j]}{E[T_{jj}]}$$

- $T_j(t)$: ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση j μέχρι το t

$$P\left\{ p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{T_j(t)}{t} \mid Z(0) = i \right\} = 1$$

- p_j ισούται προς το ποσοστό του χρόνου παραμονής στην κατάσταση j

Κατανομή Κατοχής

Θεώρημα 4: Έστω μια μη αναγώγιμη γενικευμένη αλυσίδα Markov με $E[T_{ii}] < \infty$.

Η εμφυτευμένη αλυσίδα Markov είναι εργοδική με στάσιμη κατανομή π

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \ j \geq 0; \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

- Κατανομή κατοχής της γενικευμένης αλυσίδας Markov

$$p_j = \frac{\pi_j E[T_j]}{\sum_i \pi_i E[T_i]}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

- π_j ποσοστό μεταβάσεων στην κατάσταση j
- $E[T_j]$ μέσος χρόνος παραμονής στην κατάσταση j
- Η πιθανότητα εύρεσης στην j είναι ανάλογη του $\pi_j E[T_j]$

Αλυσίδες Markov Συνεχούς Χρόνου

Έστω μια διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\colon t \geq 0\}$ που παίρνει τιμές στο {0,1,2,…}. Όταν εισέρχεται στην κατάσταση i

- Ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση i κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο ν_i
- Όταν φεύγει από την κατάσταση i, εισέρχεται στην κατάσταση j με πιθανότητα P_{ij}, όπου $\Sigma_j P_{ij} = 1$

➤ Η αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου είναι μια γενικευμένη αλυσίδα Markov με

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-\nu_i t}, \quad i, j = 0,1,\ldots$$

➤ Εκθετικοί χρόνοι παραμονής: οι αλυσίδες Markovσυνεχούς χρόνου ικανοποιούν την ιδιότητα του Markov

Αλυσίδες Markov Συνεχούς Χρόνου (συνέχεια)

- Όταν βρίσκεται στην κατάσταση i, η διαδικασία πραγματοποιεί μεταβάσεις στις καταστάσεις $j \neq i$ με ρυθμούς:

$$q_{ij} \equiv \nu_i P_{ij}$$

- Συνολικός ρυθμός μεταβάσεων εξόδου από την κατάσταση i

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = \nu_i \sum_{j \neq i} P_{ij} = \nu_i$$

- Μέσος χρόνος που δαπανήθηκε στην κατάσταση i πριν γίνει κάποια μετάβαση:

$$E[T_i] = 1/\nu_i$$

Πιθανότητα Κατοχής

- Έστω μια μη αναγώγιμη και κανονική αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου τέτοια ώστε:
  - Η εμφυτευμένη αλυσίδα Markov είναι μη αναγώγιμη
  - Το πλήθος των μεταβάσεων σε πεπερασμένο διάστημα χρόνου είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1
- Από το Θεώρημα 3: για κάθε κατάσταση j, το όριο

$$p_j = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

  υπάρχει κι είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης
- p_j είναι η *πιθανότητα κατοχής* στη μόνιμη κατάσταση για την j
- p_j ισούται προς το ποσοστό του χρόνου παραμονής στην κατάσταση j
  [Γιατί;]

Εξισώσεις Ολικού Ισοζυγίου

- Δυο ενδεχόμενα για της πιθανότητες κατοχής:
  - $p_j = 0$, για όλα τα j
  - $p_j > 0$, όλα τα j, και $\Sigma_j p_j = 1$
- Εξισώσεις Ολικού Ισοζυγίου

$$p_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \quad j = 0,1,\ldots$$

- Ρυθμός μεταβάσεων εξόδου από την j = ρυθμός μεταβάσεων εισόδου στην j
- Αν μια κατανομή $\{p_j : j = 0,1,\ldots\}$ ικανοποιεί τις ΕΟΙ, τότε είναι η *μοναδική* κατανομή κατοχής της αλυσίδας Markov
- Εναλλακτική μορφή των ΕΟΙ:

$$\sum_{j \in S} p_j \sum_{i \notin S} q_{ji} = \sum_{i \notin S} p_i \sum_{j \in S} q_{ij}, \quad S \subseteq \{0,1,\ldots\}$$

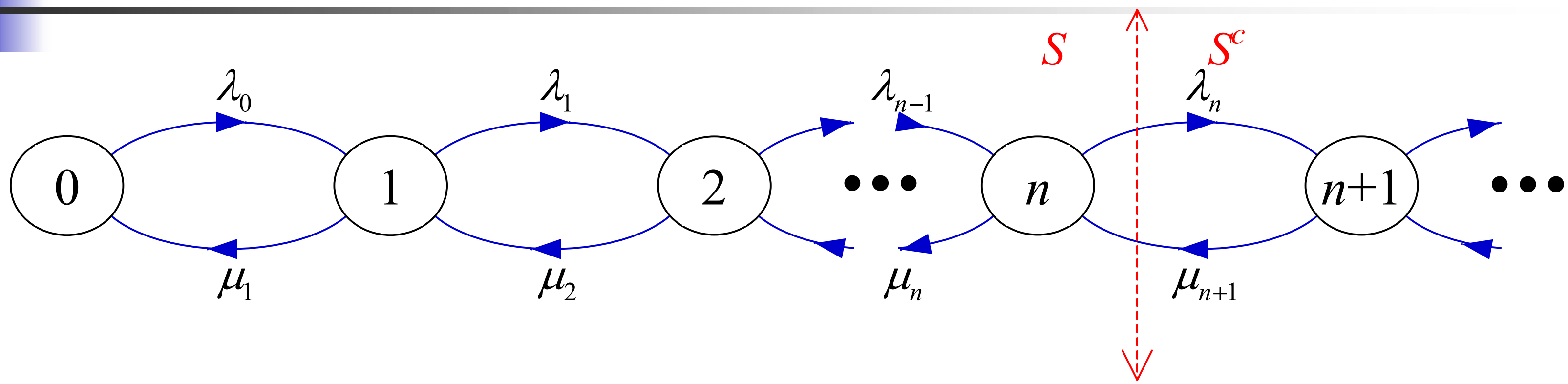
Εξισώσεις Λεπτομερούς Ισοζυγίου

- Εξισώσεις Λεπτομερούς Ισοζυγίου

$$p_j q_{ji} = p_i q_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots$$

- ☺ Απλοποιούν τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής
- ☹ Δεν ισχύουν υποχρεωτικά για κάθε αλυσίδα Markov
- Παραδείγματα: διαδικασίες γέννησης-θανάτου και αντιστρεπτές αλυσίδες Markov

Διαδικασίες Γέννησης-Θανάτου



- Μεταβάσεις μόνο μεταξύ γειτονικών καταστάσεων

$$q_{i,i+1} = \lambda_i, \quad q_{i,i-1} = \mu_i, \quad q_{ij} = 0, \ |i-j| > 1$$

- Εξισώσεις Λεπτομερούς Ισοζυγίου

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}, \quad n = 0,1,\ldots$$

- Απόδειξη: Από τις ΕΛΙ με $S = \{0,1,\ldots,n\}$ παίρνουμε:

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n+1}^{\infty} p_j q_{ji} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i q_{ij} \Rightarrow \lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}$$

Διαδικασίες Γέννησης-Θανάτου (συνέχεια)

$$\mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} \Rightarrow$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} p_{n-2} = \ldots = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0 = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

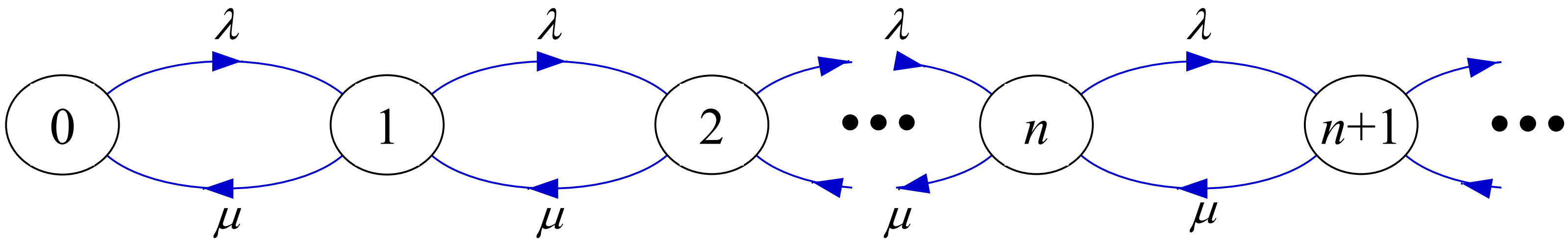
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right] = 1 \Leftrightarrow p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right]^{-1}, \text{ if } \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty$$

- Χρησιμοποιούμε τις ΕΛΙ για τον προσδιορισμό των πιθανοτήτων καταστάσεων ως συναρτήσεων του p_0
- Χρησιμοποιούμε την εξίσωση διατήρησης πιθανοτήτων για την εύρεση του p_0

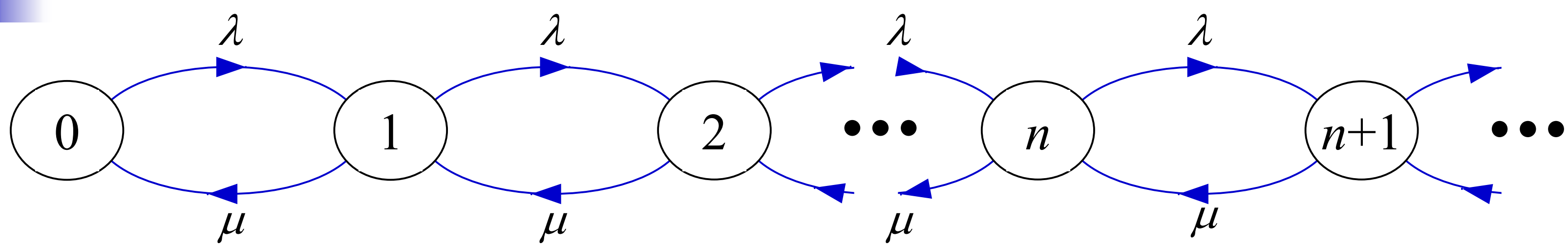
- Με τις ΕΛΙ:
  - Αποδεικνύουμε ότι αυτές ισχύουν ή
  - Δικαιολογούμε την ισχύ τους (π.χ., σε αντιστρεπτές διαδικασίες) ή
  - Υποθέτουμε ότι ισχύουν – μαντεύοντας τη μορφή τους – και λύνουμε το σύστημα

Ουρά M/M/1

- Διαδικασία αφίξεων: Poisson με ρυθμό λ
- Χρόνοι εξυπηρέτησης: με τις ίδιες εκθετικές κατανομές με παράμετρο μ
- Χρόνοι εξυπηρέτησης και (διαστημάτων) αφίξεων: ανεξάρτητοι
- Ένας server
- Άπειρη χωρητικότητα αποθήκευσης
- N(t): Αριθμός πελατών στο σύστημα το χρόνο t (κατάσταση)



Ουρά M/M/1 (συνέχεια)



- Διαδικασία γέννησης-θανάτου → ΕΛΙ

$$\mu p_n = \lambda p_{n-1} \Rightarrow$$

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} = \rho p_{n-1} = \ldots = \rho^n p_0$$

- Σταθερά κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \right] = 1 \Leftrightarrow p_0 = 1 - \rho \ , \ \text{ if } \rho < 1$$

- Στάσιμη κατανομή

$$p_n = \rho^n (1-\rho), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Ουρά M/M/1 (συνέχεια)

- Μέσο πλήθος πελατών

$$N=\sum_{n=0}^{\infty} np_n=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n=(1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

$$\Rightarrow N=\rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

- Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Little, παίρνουμε

$$T=\frac{N}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

- Παρόμοια, ο μέσος χρόνος αναμονής κι αριθμός πελατών στην ουρά δίνεται ως

$$W=T-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda} \text{ and } N_Q=\lambda W=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$