Γ. Κορίλη, "Μοντέλα Εξυπηρέτησης"

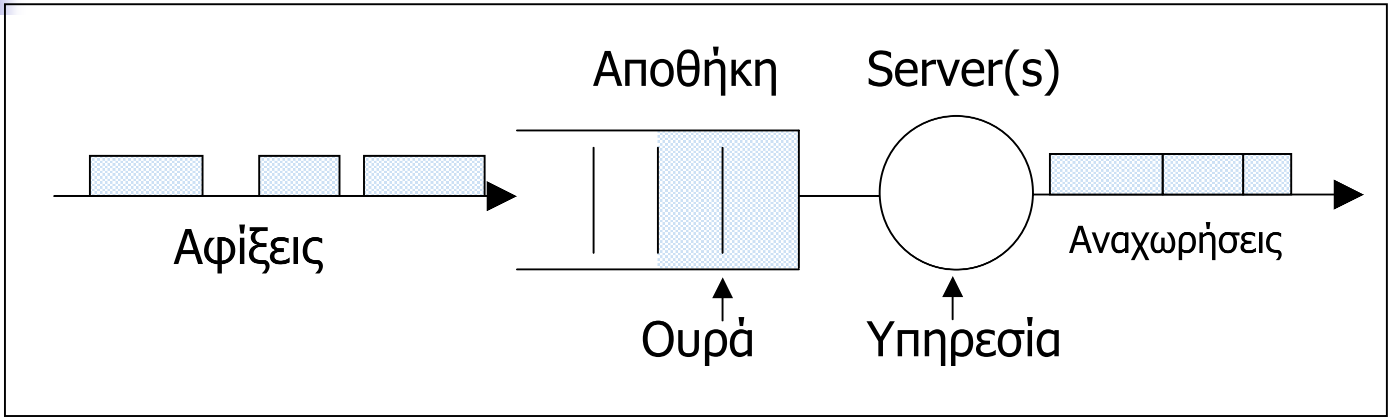
http://www.seas.upenn.edu/~tcom501/Lectures/Lecture3.pdf

- Καθυστερήσεις στα Δίκτυα Πακέτων
- Εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών
- Ανασκόπηση Θεωρίας Πιθανοτήτων
- Διαδικασία Poisson
- Θεώρημα του Little
  - Απόδειξη και Διαισθητική Ερμηνεία
  - Εφαρμογές

Πηγές Δικτυακών Καθυστερήσεων

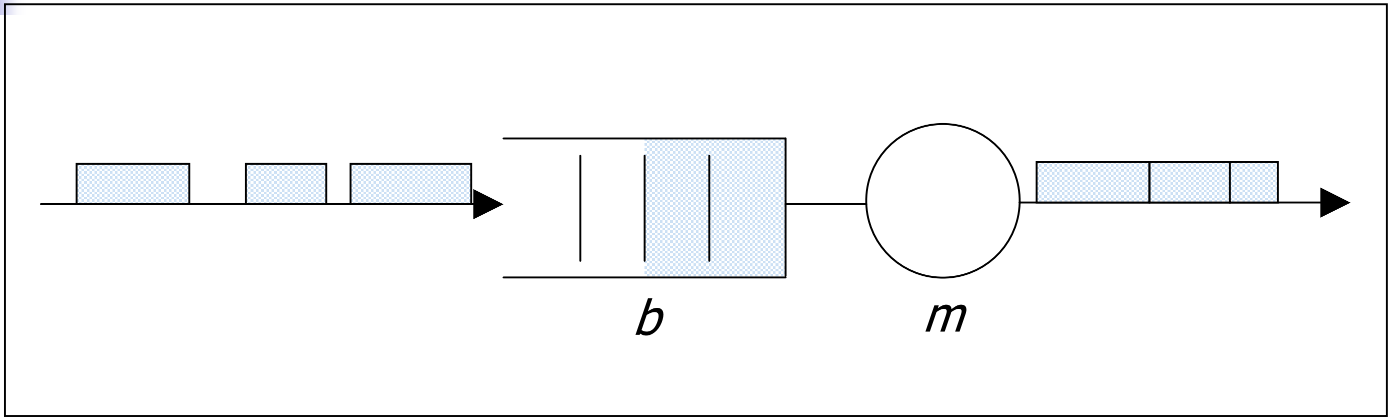
- Καθυστερήσεις Επεξεργασιών
  - Όταν η ισχύς επεξεργασίας δεν είναι σταθερή
- Καθυστερήσεις στις Ουρές
  - Αναμονή μετάδοσης στην προσωρινή αποθήκη
- Καθυστερήσεις Μετάδοσης
- Καθυστερήσεις Διάδοσης
  - Καθυστέρηση στη σύνδεση – μετάδοση ηλεκτρικού σήματος
  - Ανεξάρτητα από το φορτίο που μεταφέρεται στη σύνδεση
- Εστίαση: Καθυστερήσεις Ουρών και Μετάδοσης

Βασικό Μοντέλο Ουράς



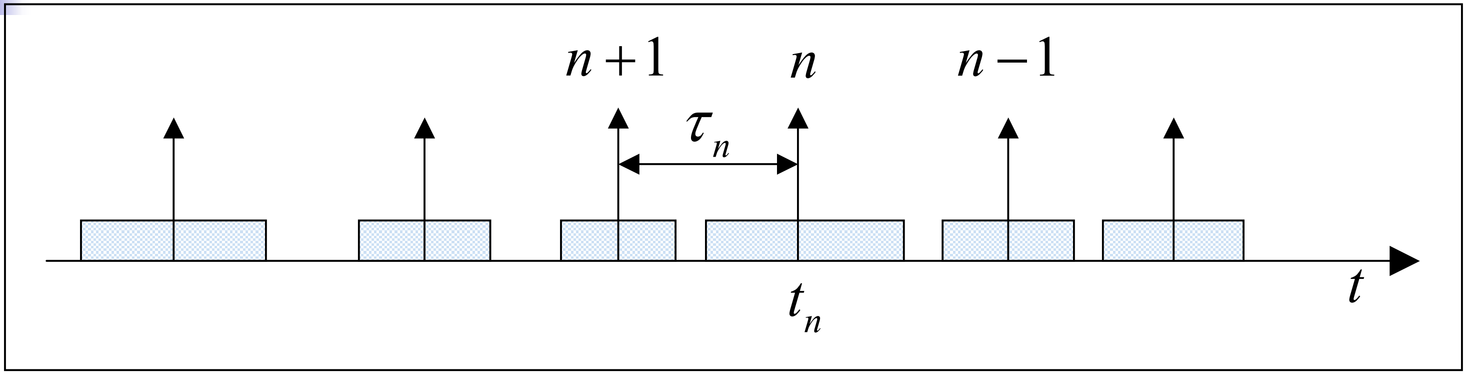
- Για σταθμούς εξυπηρέτησης με:
  - Έναν ή περισσότερους servers
  - Μια περιοχή αναμονής ή αποθήκευσης
- Πελάτες φθάνουν για να εξυπηρετηθούν
- Πελάτης που όταν φθάνει δεν βρίσκει διαθέσιμο server περιμένει στην ουρά

Χαρακτηριστικά Ουράς



- Αριθμός των servers m: ένας, πολλοί, άπειροι
- Μέγεθος Αποθήκης b
- Τρόποι Εξυπηρέτησης (καθορισμού χρόνων): FCFS, LCFS, Processor Sharing (PS), κλπ.
- Διαδικασία αφίξεων
- Στατιστική εξυπηρέτησης

Διαδικασία Αφίξεων



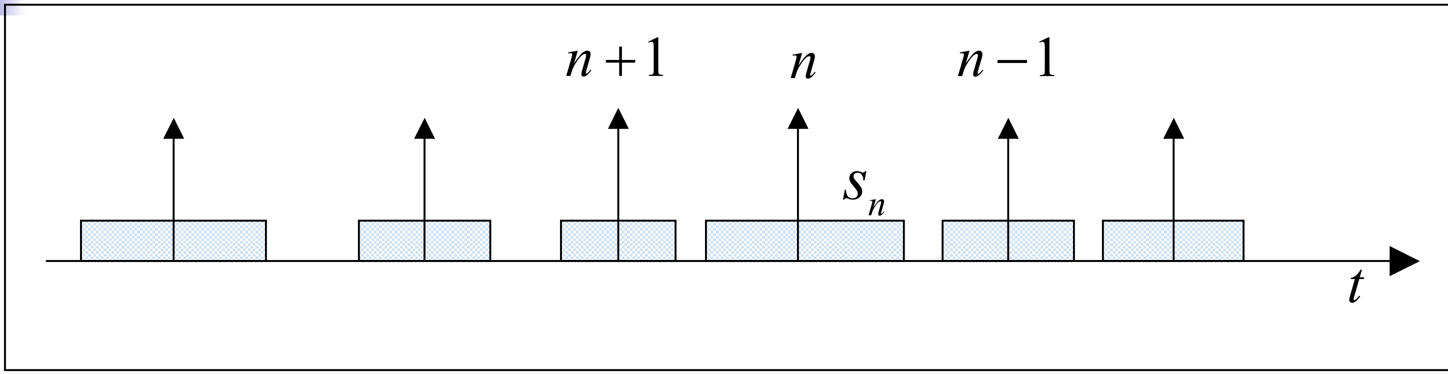
- τ_n : χρόνος μεταξύ αφίξεων των πελατών *n* & *n*+1
- τ_n είναι μια τυχαία
- $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία

➧ Οι χρόνοι αφίξεων έχουν τις ίδιες κατανομές και μέση τιμή

$$E[\tau_n] = E[\tau] = 1/\lambda$$

- λ ονομάζεται ρυθμός αφίξεων

Διαδικασία Εξυπηρετήσεων



- s_n : χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη n στο server
- $\{s_n,\ n \geq 1\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν τις ίδιες κατανομές και κοινή μέση τιμή

$$E[s_n] = E[s] = \mu$$

- μ ονομάζεται ρυθμός εξυπηρέτησης

- Για τα πακέτα, είναι οι χρόνοι εξυπηρέτησης πράγματι τυχαίοι;

Δείκτες Ουρών

- Γενικός δείκτης: A/S/m/k
- A συμβολίζει τη διαδικασία αφίξεων
  - Οι αφίξεις Poisson συμβολίζονται με M (από τη Μαρκοβιανή)
- B συμβολίζει την κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης
  - M: εκθετική κατανομή
  - D: αιτιοκρατικοί χρόνοι εξυπηρέτησης
  - G: γενική κατανομή
- m είναι ο αριθμός των servers
- k είναι ο μέγιστος αριθμός πελατών που επιτρέπονται στο σύστημα – ή στην αποθήκη ή για εξυπηρέτηση
  - k παραλείπεται όταν το μέγεθος αποθήκευσης είναι άπειρο

Δείκτες Ουρών: Παραδείγματα

- M/M/1: Αφίξεις Poisson, εκθετικά κατανεμημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης, ένας server, άπειρη αποθήκη
- M/M/m: όπως πριν αλλά με m servers
- M/M/m/m: Αφίξεις Poisson, εκθετικά κατανεμημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης, m server, χωρίς αποθήκη
- M/G/1: Αφίξεις Poisson, χρόνοι εξυπηρέτησης που κατανέμονται όμοια με μια γενική κατανομή, ένας server, άπειρη αποθήκη
- */D/∞ : Σύστημα σταθερής καθυστέρησης

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

- Εκθετική Κατανομή
- Ιδιότητα Λήθης
- Κατανομή Poisson
- Διαδικασία Poisson
  - Ορισμός και Ιδιότητες
  - Κατανομή Χρόνων Αφίξεων
  - Μοντέλα Στατιστικών Αφίξεων και Εξυπηρέτησης

Η Εκθετική Κατανομή

- Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ, όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

- Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή (συνέχεια)

- Μέση Τιμή και Τετράγωνο Τυπικής Απόκλισης:

$$E[X] = \frac{1}{\mu}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\mu^2}$$

- Απόδειξη:

$$E[X] = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x \mu e^{-\mu x} dx =$$

$$= -xe^{-\mu x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \mu e^{-\mu x} dx = -x^2 e^{-\mu x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\mu x} dx = \frac{2}{\mu} E[X] = \frac{2}{\mu^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$$

Ιδιότητα Λήθης

- Η ιστορία του παρελθόντος δεν έχει καμιά επιρροή στο μέλλον

$$P\{X > x + t \mid X > t\} = P\{X > x\}$$

➢ Απόδειξη:

$$P\{X > x + t \mid X > t\} = \frac{P\{X > x + t, X > t\}}{P\{X > t\}} = \frac{P\{X > x + t\}}{P\{X > t\}}$$

$$= \frac{e^{-\mu(x+t)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu x} = P\{X > x\}$$

- Εκθετική Κατανομή: η <u>μόνη</u> συνεχής κατανομή με την ιδιότητα της λήθης

Κατανομή Poisson

- Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ όταν έχει τις πιθανότητες:

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

- Μεγάλης σημασίας είναι ο αριθμός των τυχαίων γεγονότων που συμβαίνουν σε δοθέν χρονικό διάστημα – *Η Διαδικασία Poisson*:
  - Οι πελάτες που φθάνουν σε μια μέρα
  - Τα λάθος τηλεφωνήματα σε μια βδομάδα
  - Οι φοιτητές που επισκέπτονται τον διδάσκοντα στις ώρες γραφείου
  - … και πακέτα που φθάνουν σ’ ένα switch του δικτύου

Διαδικασία Poisson (συνέχεια)

- Μέση Τιμή και Τετράγωνο Τυπικής Απόκλισης

$$E[X]=\lambda, \quad \mathrm{Var}(X)=\lambda$$

- Απόδειξη:

$$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty} kP\{X=k\}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$

$$E[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty} k^2P\{X=k\}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty} je^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda^2+\lambda$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

Άθροισμα Τυχαίων Μεταβλητών Poisson

- X_i , $i = 1,2,\dots,n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές
- X_i ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ_i
- Μερικό άθροισμα που ορίζεται ως:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- S_n ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Άθροισμα Τυχαίων Μεταβλητών Poisson (συνέχεια)

Proof: For $n = 2$. Generalization by induction. The pmf of $S = X_1 + X_2$ is

$$
\begin{aligned}
P\{S = m\} &= \sum_{k=0}^{m} P\{X_1 = k, X_2 = m - k\} \\
&= \sum_{k=0}^{m} P\{X_1 = k\}\, P\{X_2 = m - k\} \\
&= \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{m-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}{m!}
\end{aligned}
$$

Poisson with parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Δειγματοληψία μιας Μεταβλητής Poisson

- X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ
- Κάθε μια από τις αφίξεις της X είναι τύπου i με πιθανότητα p_i, $i=1,2,\ldots,n$, ανεξάρτητα από τις άλλες αφίξεις; $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$
- X_i συμβολίζει τον αριθμό των αφίξεων τύπου i

- $X_1, X_2, \ldots X_n$ είναι ανεξάρτητες
- X_i ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_i = \lambda p_i$

Δειγματοληψία μιας Μεταβλητής Poisson (συνέχεια)

Proof: For $n = 2$. Generalize by induction. Joint pmf:

$$P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2\} =$$

$$\begin{aligned}
&= P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2 | X = k_1 + k_2\}\, P\{X = k_1 + k_2\} \\
&= \binom{k_1 + k_2}{k_1} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!} \\
&= \frac{1}{k_1! k_2!} (\lambda p_1)^{k_1} (\lambda p_2)^{k_2} \cdot e^{-\lambda(p_1+p_2)} \\
&= e^{-\lambda p_1} \frac{(\lambda p_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda p_2} \frac{(\lambda p_2)^{k_2}}{k_2!}
\end{aligned}$$

- X_1 and X_2 are independent
- $P\{X_1 = k_1\} = e^{-\lambda p_1} \frac{(\lambda p_1)^{k_1}}{k_1!}$, $P\{X_2 = k_2\} = e^{-\lambda p_2} \frac{(\lambda p_2)^{k_2}}{k_2!}$

  X_i follows Poisson distribution with parameter λp_i.

Προσέγγιση Poisson στη Διωνυμική

- Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n, p)

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

- Καθώς n→∞ και p→0, με np=λ σταθερό, η διωνυμική κατανομή συγκλίνει στην κατανομή Poisson με παράμετρο λ

- Απόδειξη:

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{(n-k+1)\ldots(n-1)n}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\frac{(n-k+1)\ldots(n-1)n}{n^k}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\lambda}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

$$P\{X=k\}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Διαδικασία Poisson με Ρυθμό λ

- {A(t): t≥0} διαδικασία αρίθμησης
  - A(t) είναι ο αριθμός των γεγονότων (αφίξεων) που συνέβησαν από το χρόνο 0 – όταν A(0)=0 – ως το χρόνο t
  - A(t)-A(s) είναι ο αριθμός των γεγονότων στο διάστημα (s, t]
- Οι αριθμοί των γεγονότων σε ξένα διαστήματα είναι ανεξάρτητοι independent
- Ο αριθμός των γεγονότων σε κάθε διάστημα (t, t+τ] μήκους τ
  - Εξαρτάται μόνο από το μήκος τ
  - Ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda\tau$

$$P\{A(t+\tau)-A(t)=n\}=e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!},\ n=0,1,\ldots$$

- ➡ Ο μέσος αριθμός των γεγονότων λ ανά τ είναι ο *ρυθμός αφίξεων (γεγονότων)*

Στατιστική Χρόνων Αφίξεων

- Οι χρόνοι αφίξεων για μια διαδικασία Poisson είναι ανεξάρτητοι κι ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ
- t_n: χρόνος της $n^{\text{οστής}}$ άφιξης; $\tau_n=t_{n+1}-t_n$: $n^{\text{οστό}}$ χρονικό διάστημα αφίξεων

$$P\{\tau_n \le s\} = 1 - e^{-\lambda s},\ s \ge 0$$

<u>Απόδειξη:</u>

- Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

$$P\{\tau_n \le s\} = 1 - P\{\tau_n > s\} = 1 - P\{A(t_n + s) - A(t_n) = 0\} = 1 - e^{-\lambda s}$$

- Η ανεξαρτησία έπεται από την ανεξαρτησία του αριθμού των αφίξεων σε ξένα διαστήματα

Πιθανότητες Μικρών Διαστημάτων

- Διάστημα (t+ δ, t] μήκους δ

$$P\{A(t+\delta)-A(t)=0\}=1-\lambda\delta+o(\delta)$$
$$P\{A(t+\delta)-A(t)=1\}=\lambda\delta+o(\delta)$$
$$P\{A(t+\delta)-A(t)\geq 2\}=o(\delta)$$

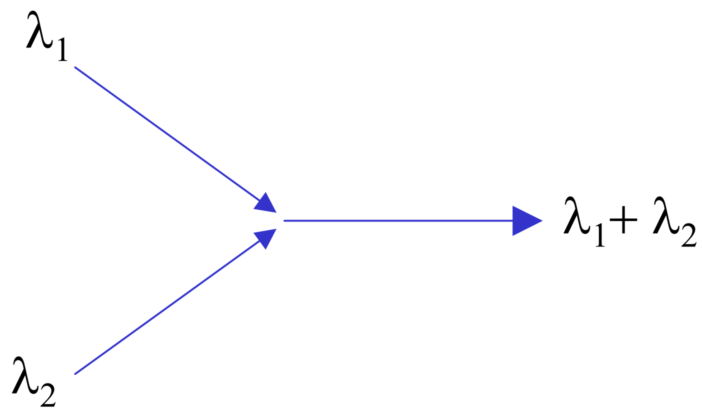
Απόδειξη:

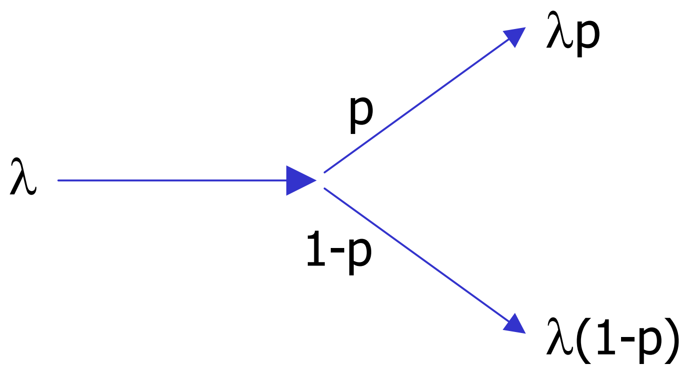
$$P\{A(t+\delta)-A(t)=0\}=e^{-\lambda\delta}=1-\lambda\delta+\frac{(\lambda\delta)^2}{2}=1-\lambda\delta+o(\delta)$$

$$P\{A(t+\delta)-A(t)=1\}=e^{-\lambda\delta}\lambda\delta=\lambda\delta\left(1-\lambda\delta+\frac{(\lambda\delta)^2}{2}\right)=\lambda\delta+o(\delta)$$

$$\begin{aligned}P\{A(t+\delta)-A(t)\geq 2\}&=1-\sum_{k=0}^{1}P\{A(t+\delta)-A(t)=k\}\\&=1-(1-\lambda\delta+o(\delta))-(\lambda\delta+o(\delta))=o(\delta)\end{aligned}$$

Συνένωση & Διαχωρισμός Διαδικασιών Poisson





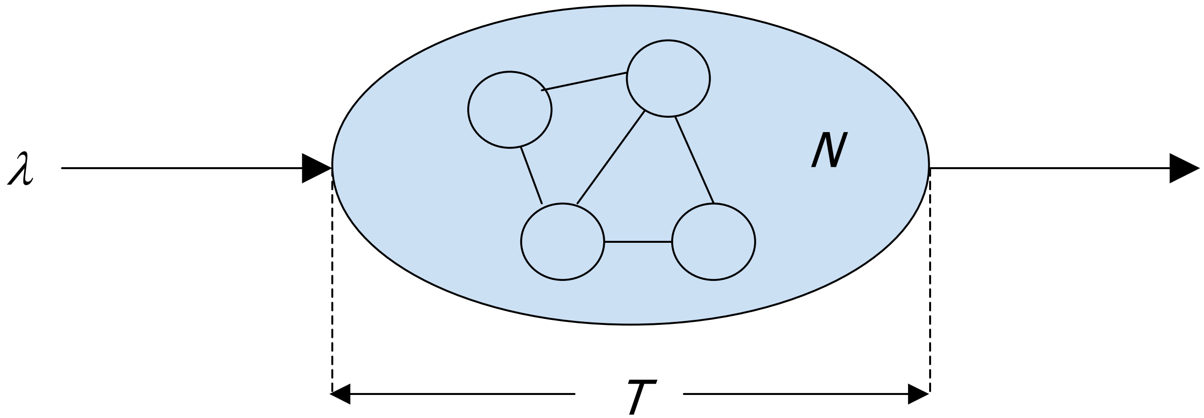
- $A_1, \ldots, A_k$ ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$
- Συνενωμένες σε μια διαδικασία $A = A_1 + \ldots + A_k$
- A είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$

- A: διαδικασία Poisson με ρυθμό λ
- Διαχωρίζεται στις διαδικασίες A_1 & A_2 ανεξάρτητα, με πιθανότητες p & 1-p αντίστοιχα
- A_1 είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_1 = \lambda p$
  A_2 είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_2 = \lambda(1-p)$

Περιγραφή Στατιστικών Αφίξεων

- Η διαδικασία Poisson συνήθως χρησιμοποιείται για την περιγραφή αφίξεων πακέτων σε διάφορα προβλήματα δικτύων
- Ο λόγος: διότι παρέχει ένα καλό μοντέλο για τη συνολική κίνηση ενός μεγάλου αριθμού "ανεξάρτητων" χρηστών
  - n ροές κίνησης, με ανεξάρτητους όμοια κατανεμημένους χρόνους αφίξεων, των οποίων η κατανομή F(s) δεν είναι αναγκαστικά εκθετική
  - Ο ρυθμός αφίξεων κάθε ροής είναι λ/n
  - Καθώς $n \rightarrow \infty$, η αθροιστική ροή μπορεί να προσεγγισθεί από την Poisson κάτω από συνηθισμένες συνθήκες για την F(s) (πχ., $F(0)=0$, $F'(0)>0$)
- ☺ Ο κυριότερος λόγος για την υπόθεση Poisson: Αναλυτική διερεύνηση των μοντέλων ουρών

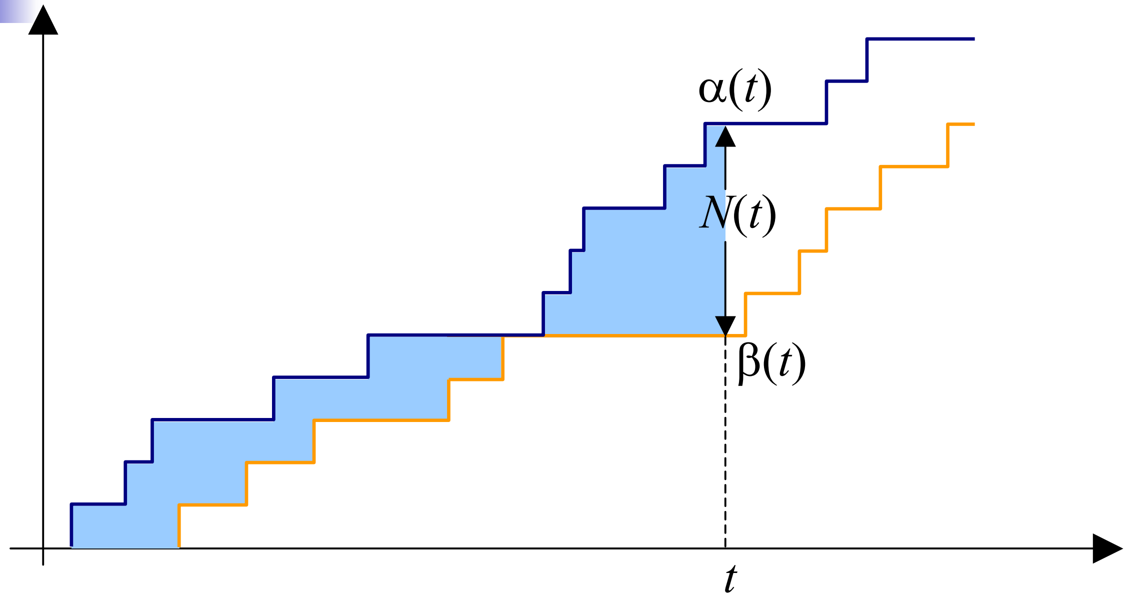
Το Θεώρημα του Little



- λ: ρυθμός αφίξεων πελατών
- N: μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα
- T: μέση καθυστέρηση ανά πελάτη στο σύστημα
- Θεώρημα του Little: Το σύστημα σε μόνιμη κατάσταση

$$N = \lambda T$$

Διαδικασίες Αρίθμησης σε μια Ουρά



- $N(t)$: αριθμός πελατών στο σύστημα το χρόνο t
- $\alpha(t)$: αριθμός αφίξεων πελατών ως το χρόνο t
- $\beta(t)$: αριθμός αναχωρήσεων πελατών ως το χρόνο t
- T_i : χρόνος που πέρασε στο σύστημα ο iοστός πελάτης

Μέσοι Χρόνοι

- Μέσος χρόνος στο διάστημα [0,t]
- Μέση χρόνοι στη μόνιμη κατάσταση

$$N_t = \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds \qquad N = \lim_{t\to\infty} N_t$$

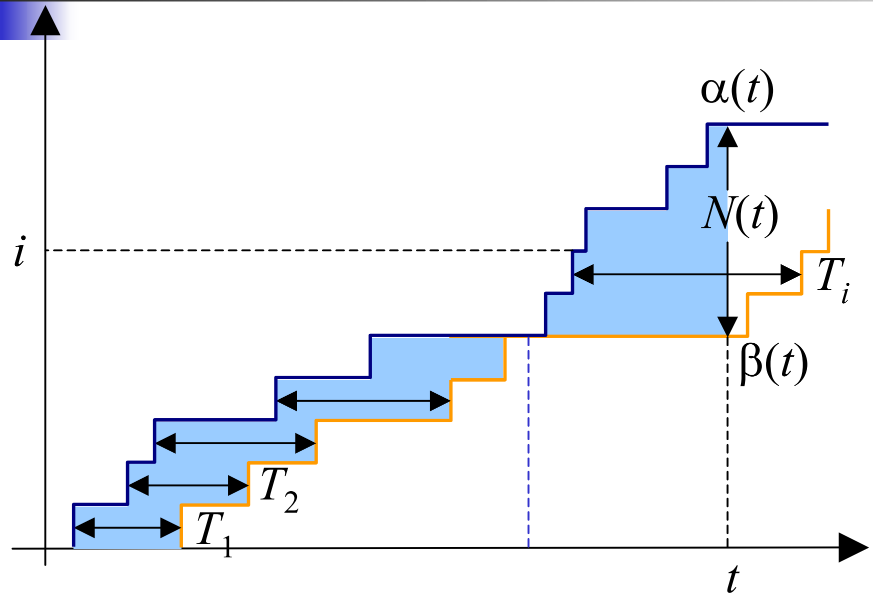
$$\lambda_t = \frac{a(t)}{t} \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$$

$$T_t = \frac{1}{a(t)}\sum_{i=1}^{a(t)} T_i \qquad T = \lim_{t\to\infty} T_t$$

$$\delta_t = \frac{\beta(t)}{t} \qquad \delta = \lim_{t\to\infty} \delta_t$$

- Θεώρημα Little $N=\lambda T$
- Εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε σύστημα ουράς εφόσον:
  - Τα όρια T, λ και δ υπάρχουν και
  - λ= δ
  - Δίνουμε μια απλή γραφική απόδειξη κάτω από πιο περιοριστικές συνθήκες

Απόδειξη του Θεωρήματος του Little' για FCFS



- Σύστημα FCFS, N(0)=0
  - $\alpha(t)$ και $\beta(t)$: σκαλωτά γραφήματα
  - $N(t) = \alpha(t) - \beta(t)$
  - Χρωματισμένη περιοχή

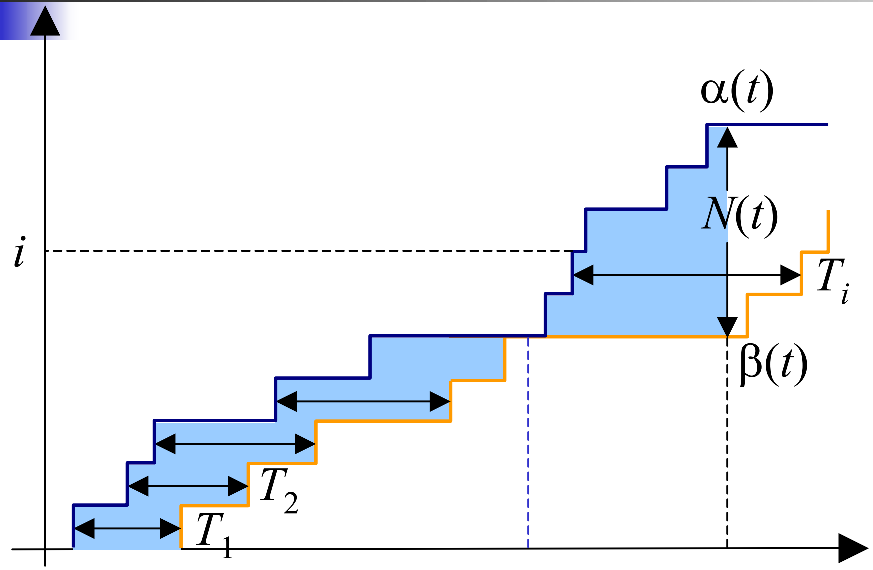
$$S(t) = \int_0^t N(s)ds$$

- Υπόθεση: N(t)=0, άπειρες φορές συχνά. Για κάθε τέτοιο t

$$\int_0^t N(s)ds = \sum_{i=1}^{\alpha(t)} T_i \Rightarrow \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds = \frac{\alpha(t)}{t}\frac{\sum_1^{\alpha(t)} T_i}{\alpha(t)} \Rightarrow N_t = \lambda_t T_t$$

  - Αν τα όρια $N_t \to N$, $T_t \to T$, $\lambda_t \to \lambda$ υπάρχουν, έπεται ο τύπος του Little
  - Θα απαλλαγούμε από την τελευταία υπόθεση

Απόδειξη του Θεωρήματος του Little για FCFS (συνέχεια)



- Γενικώς – ακόμη κι όταν η ουρά δεν είναι άδεια άπειρες φορές συχνά:

$$\sum_{i=1}^{\beta(t)} T_i \leq \int_0^t N(s)ds \leq \sum_{i=1}^{\alpha(t)} T_i \Rightarrow \frac{\beta(t)}{t}\frac{\sum_1^{\beta(t)} T_i}{\beta(t)} \leq \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds \leq \frac{\alpha(t)}{t}\frac{\sum_1^{\alpha(t)} T_i}{\alpha(t)}$$

$$\Rightarrow \delta_t T_t \leq N_t \leq \lambda_t T_t$$

- Έπεται το ζητούμενα αν υπάρχουν τα όρια $T_t \to T$, $\lambda_t \to \lambda$, και $\delta_t \to \delta$ και $\lambda = \delta$

Πιθανοκρατική Μορφή του Θεωρήματος του Little

- Ως τώρα έχουμε θεωρήσει μια απλή συνάρτηση δειγματοληψίας μιας στοχαστικής διαδικασίας
- Τώρα θα επικεντρωθούμε στις πιθανότητες των διαφόρων συναρτήσεων δειγματοληψίας μιας στοχαστικής διαδικασίας
- Πιθανότητα για n πελάτες στο σύστημα το χρόνο t

$$p_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

- Αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα το χρόνο t

$$E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n.P\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t)$$

Πιθανοκρατική Μορφή του Θεωρήματος του Little (συνέχεια)

- $p_n(t)$, $E[N(t)]$ εξαρτώνται από το t και την αρχική κατανομή για t=0
- Θεωρούμε συστήματα που συγκλίνουν σε μόνιμες καταστάσεις
- Υπάρχουν p_n ανεξάρτητα της αρχικής κατανομής

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

- Αναμενόμενος αριθμός πελατών στη μόνιμη κατάσταση [στοχαστική μέση τιμή

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \lim_{t\to\infty} E[N(t)]$$

- Για μια εργοδική διαδικασία, ο χρονικός μέσος της συνάρτησης δειγματοληψίας ισούται προς τη μέση τιμή της μόνιμης κατάστασης, με πιθανότητα 1.

$$N = \lim_{t\to\infty} N_t = \lim_{t\to\infty} E[N(t)] = EN$$

Πιθανοκρατική Μορφή του Θεωρήματος του Little (συνέχεια)

- Κατ' αρχήν, μπορούμε να βρούμε την κατανομή πιθανότητας της καθυστέρησης T_i για τον πελάτη i, και από αυτήν τη μέση τιμή $E[T_i]$, που συγκλίνει στη μόνιμη κατάσταση

$$ET = \lim_{i\to\infty} E[T_i]$$

- Για ένα εργοδικό σύστημα

$$T = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_1^\infty T_i}{i} = \lim_{i\to\infty} E[T_i] = ET$$

- Πιθανοκρατική Μορφή του Τύπου του Little:
- Ρυθμός αφίξεων ορισμένος ως

$$EN = \lambda.ET$$

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\alpha(t)]}{t}$$

Χρονικές – Στοχαστικές Μέσες Τιμές

- "Χρονικές μέσες τιμές = Στοχαστικές μέσες τιμές," για όλα τα συστήματα δικτύων
- Ισχύει αν μια απλή συνάρτηση δειγματοληψίας της στοχαστικής διαδικασίας περιέχει όλες τις δυνατές πραγματοποιήσεις της διαδικασίας καθώς $t \to \infty$
- Μπορεί να αιτιολογηθεί στη βάση των γενικών ιδιοτήτων των αλυσίδων Markov

Ροπο-Γεννήτρια Συνάρτηση

1. Definition: for any $t \in \mathbb{R}$:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\ dx, & X \text{ continuous} \\ \displaystyle\sum_j e^{tx_j} P\{X = x_j\}, & X \text{ discrete} \end{cases}$$

2. If the moment generating function $M_X(t)$ of X exists and is finite in some neighborhood of $t = 0$, it determines the distribution of X *uniquely*.

3. Fundamental Properties: for any $n \in \mathbb{N}$:

   (i) $\dfrac{d^n}{dt^n} M_X(t) = E[X^n e^{tX}]$

   (ii) $\dfrac{d^n}{dt^n} M_X(0) = E[X^n]$

4. Moment Generating Functions and Independence:

   X, Y : independent $\Rightarrow$ $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$

   The opposite *is not* true.

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Distribution (parameters)	Prob. Mass Fun. $P\{X=k\}$	Moment Gen. Fun. $M_X(t)$	Mean $E[X]$	Variance $\mathrm{Var}(X)$
Binomial (n,p)	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$	$(pe^t+1-p)^n$	np	$np(1-p)$
Geometric p	$(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Negative Bin. (r,p)	$\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$ $k=r,r+1,\ldots$	$\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Poisson λ	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\ldots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Distribution (parameters)	Prob. Density Fun. $f_X(x)$	Moment Gen. Fun. $M_X(t)$	Mean $E[X]$	Variance $\mathrm{Var}(X)$
Uniform over (a, b)	$\frac{1}{b-a}$ $a < x < b$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential λ	$\lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Normal (μ, σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ $-\infty < x < \infty$	$e^{\mu t+(\sigma t)^2/2}$	μ	σ^2