1.7 Αριθμητικές Συναρτήσεις

Ενώ οι μηχανές Turing ορίζουν ένα μηχανιστικό μοντέλο υπολογισμού συναρτήσεων, (και οι γραμματικές ένα ισοδύναμο πληροφοριακό μοντέλο), οι αριθμητικές συναρτήσεις που θα παρουσιάσουμε σ' αυτήν την ενότητα, δίνουν ένα άμεσο μαθηματικό χαρακτηρισμό των Turing και των γραμματικά υπολογίσιμων συναρτήσεων. Ακολουθούμε μια επαγωγική στη φύση της μέθοδο ορισμού κλάσεων συναρτήσεων, ξεκινώντας από ένα μικρό σύνολο **βασικών** συναρτήσεων και δυο κανόνων σύνθεσης, αυτών της **συναρτησιακής σύνθεσης** και της **πρωτόγονης αναδρομής**, για να κτίσουμε αρχικά την κλάση των λεγόμενων **πρωτόγονων αναδρομικών συναρτήσεων**. Πρόσθετοι ορισμοί συναρτήσεων, όπως ορισμοί μέσω φραγμένων αθροισμάτων ή γινομένων και ορισμοί μέσω φραγμένης ελαχιστοποίησης δείχνεται ότι δεν διευρύνουν την κλάση των πρωτόγονων αναδρομικών συναρτήσεων. Το ίδιο συμβαίνει και με ορισμούς που βάζουν συνθήκες πάνω στα ορίσματα μιας συνάρτησης μέσω κατηγορημάτων ακόμη και στην περίπτωση που τα τελευταία συνδυάζονται με λογικούς τελεστές ή εφαρμόζονται πάνω τους καθολικοί ή υπαρξιακοί ποσοδείκτες. Παρόλο που η κλάση αυτή περιλαμβάνει πολλές χρήσιμες στην καθημερινή ζωή συναρτήσεις και παρόλο που όλες οι συναρτήσεις αυτής της κλάσης αποδεικνύεται να είναι Turing υπολογίσιμες, (κάτι που φροντίσαμε να είναι πράγματι μέσω της κατάλληλης επιλογής των βασικών συναρτήσεων και των κανόνων σύνθεσης), αποδεικνύεται ότι απαιτείται επέκταση της κλάσης για να περιλάβει όλες τις Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις. Αυτή η επέκταση επιτυγχάνεται με απομάκρυνση του άνω φράγματος από τον τελεστή ελαχιστοποίησης. Η κλάση των συναρτήσεων που προκύπτει έτσι, είναι η καλούμενη κλάση των **μ-αναδρομικών συναρτήσεων** που αποδεικνύεται ίση με αυτήν των Turing , συνεπώς, και με αυτή των γραμματικά υπολογίσιμων συναρτήσεων, δηλαδή ισοδύναμη με την έννοια του **αποτελεσματικού υπολογισμού**.

Θα περιοριστούμε σε αριθμητικές συναρτήσεις από το N^n στο N με $n \geq 0$. Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι με την χρήση ειδικής κωδικοποίησης, της λεγόμενης **Gödel αρίθμησης**, επιτυγχάνεται μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ αριθμών και συμβολοσειρών, και συνεπώς συναρτήσεις από συμβολοσειρές σε συμβολοσειρές μπορούν να μετατραπούν σε αντίστοιχες συναρτήσεις από αριθμούς σε αριθμούς. Η Gödel αρίθμηση, στηριζόμενη στην μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτους παράγοντες, επιτρέπει την παράσταση μιας ακολουθίας $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αριθμών ή συμβόλων, (θεωρούμε ότι τα σύμβολα ενός αλφαβήτου είναι κωδικοποιημένα σε αριθμούς), με τον φυσικό αριθμό $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n}$, όπου p_i είναι ο i-στός πρώτος αριθμός. Επιπλέον η Gödel αρίθμηση επιτρέπει να δείξει κανείς ότι και άλλοι ορισμοί αναδρομής, όπως αναδρομή σε δυο ή περισσότερα ορίσματα, παράγουν πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις όταν εφαρμόζονται σε πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις. Τα παραπάνω ξεφεύγουν από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης/σπουδαστής παραπέμπεται σε κατάλληλη βιβλιογραφία.

Δίνουμε αρχικά τον ορισμό των βασικών συναρτήσεων.

Ορισμός 1.13 : Βασικές συναρτήσεις είναι οι ακόλουθες:
1) η **σταθερή συνάρτηση** n-ορισμάτων που απεικονίζει κάθε n-άδα φυσικών αριθμών στον ίδιο φυσικό αριθμό, δηλαδή

$$C_m^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m,\ m \in N,\ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$$

2) η **προβολική ή ταυτοτική συνάρτηση** n-ορισμάτων που απεικονίζει κάθε n-άδα φυσικών αριθμών στην i-οστή συνιστώσα της, δηλαδή

$$P_i^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i,\ 1 \leq i \leq n,\ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$$

3)η **διαδοχική συνάρτηση** ενός ορίσματος που απεικονίζει κάθε φυσικό αριθμό στον επόμενό του, δηλαδή

$$S(x) = x + 1,\ x \in N$$

Στην συνέχεια δίνουμε τους δυο κανόνες σύνθεσης μιας συνάρτησης από άλλες.

Ορισμός 1.14 : Οι **κανόνες σύνθεσης** συναρτήσεων είναι οι ακόλουθοι:
1)**Συναρτησιακή σύνθεση** είναι η περίπτωση που οι τιμές κάποιων συναρτήσεων γίνονται ορίσματα μιας συνάρτησης για να προκύψει μια νέα συνάρτηση ως ακολούθως:

Για $n, m \geq 0$,έστω h μια m-ορισμάτων συνάρτηση και έστω επίσης οι n-ορισμάτων συναρτήσεις $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Έστω f η n-ορισμάτων συνάρτηση έτσι ώστε για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in N^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Τότε λέμε ότι η f προκύπτει από την h και τις $g_1, \ldots, g_m$ με **συναρτησιακή σύνθεση** και συμβολίζουμε αυτή με

$$f = h \circ (g_1, \ldots, g_m)$$

.

2) **πρωτόγονη αναδρομή** είναι η περίπτωση που μια συνάρτηση ορίζεται από δυο άλλες συναρτήσεις, την μια για να πάρει αρχική τιμή και την άλλη για επόμενες τιμές σε διαδοχικά σημεία σε συνάρτηση με την τιμή της στο αμέσως προηγούμενο σημείο ως ακολούθως:

Έστω $n \geq 0$, έστω g μια n-ορισμάτων συνάρτηση, και έστω h μια $(n+2)$-ορισμάτων συνάρτηση. Έστω f η $(n+1)$-ορισμάτων συνάρτηση έτσι ώστε για κάθε

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in N^n$ και $y \in N$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) &= h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Τότε λέμε ότι η f προκύπτει από τις g και h με **πρωτόγονη αναδρομή**. Το y είναι το **όρισμα αναδρομής** και τα ορίσματα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι οι **παράμετροι της αναδρομής**.

Έχοντας ορίσει τις βασικές συναρτήσεις και τους δυο κανόνες σύνθεσης είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.15 : Οι **πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις** είναι όλες οι βασικές συναρτήσεις και όλες εκείνες οι συναρτήσεις που μπορούν να ληφθούν απ' αυτές με οποιονδήποτε αριθμό διαδοχικών εφαρμογών των κανόνων συναρτησιακής σύνθεσης και πρωτόγονης αναδρομής.

Παράδειγμα 1.16 : Εφαρμόζοντας τους παραπάνω ορισμούς θα δείξουμε με αυστηρά τυπικό τρόπο ότι οι γνωστές μας 2-ορισμάτων πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις . Λέμε "αυστηρά" τυπικό τρόπο, διότι θα σχηματίσουμε μια ακολουθία συναρτήσεων με την προς απόδειξη συνάρτηση τελευταία στην σειρά, τέτοια ώστε κάθε συνάρτηση στην ακολουθία είναι είτε βασική συνάρτηση ή έχει ληφθεί από προηγούμενες συναρτήσεις στην ακολουθία με συναρτησιακή σύνθεση ή πρωτόγονη αναδρομή.

Έστω ότι συμβολίζουμε με $add(x, y)$ και $mult(x, y)$ αντίστοιχα τις συναρτήσεις πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι οι αντίστοιχοι τυπικοί ορισμοί είναι οι ακόλουθοι:

1) για την συνάρτηση $add(x, y)$ έχουμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων:

$P_1^{(1)}$	προβολική συνάρτηση
$P_3^{(3)}$	προβολική συνάρτηση
S	η διαδοχική συνάρτηση
g_1	η συνάρτηση με $g_1(x) = P_1^{(1)}(x)$
h_1	η συνάρτηση με $h_1 = S \circ (P_3^{(3)})$
add	η συνάρτηση πρόσθεσης με $\begin{cases} add(x,0) = g_1(x), \text{ και} \\ add(x, y+1) = h_1(x, y, add(x, y)) \end{cases}$

Πράγματι,

$add(x, 0) = P_1^{(1)}(x) = x$, (δηλαδή, $x + 0 = 0$), και,

$add(x, y+1) = S(add(x, y)) = add(x, y) + 1$, δηλαδή, $x + (y+1) = (x+y) + 1$.

2) για την συνάρτηση $mult(x,y)$ έχουμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων:

$P_1^{(1)}$	προβολική συνάρτηση
$P_3^{(3)}$	προβολική συνάρτηση
S	η διαδοχική συνάρτηση
h_1	η συνάρτηση με $h_1 = S \circ (P_3^{(3)})$
add	η συνάρτηση πρόσθεσης
$C_0^{(1)}$	η σταθερή συνάρτηση μηδέν
$P_1^{(3)}$	προβολική συνάρτηση
g_2	η συνάρτηση με $g_2(x) = C_0^{(1)}(x)$
h_2	η συνάρτηση με $h_2 = add \circ (P_1^{(3)}, P_3^{(3)})$
$mult$	η συνάρτηση πολλαπλασιασμού με $\begin{cases} mult(x,0) = g_2(x), \text{ και} \\ mult(x,y+1) = h_2(x,y,mult(x,y)) \end{cases}$

Πράγματι,

$mult(x,0) = C_0^{(1)} = 0$, δηλαδή, $x \cdot 0 = 0$, και,

$mult(x,y+1) = add(x, mult(x,y))$, (δηλαδή, $x(y+1) = x + (xy)$). $\diamond$

Σε επόμενα παραδείγματα θα ακολουθήσουμε μια όχι τόσο αυστηρή μέθοδο απόδειξης, όπως και συμβολισμού συναρτήσεων που έχουν αποδειχθεί προηγούμενα ότι είναι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις . Έτσι, για παράδειγμα θα γράφουμε $x+y$ αντί $add(x,y)$, xy ή $x \cdot y$ αντί $mult(x,y)$, m αντί $C_m^{(n)}$, κλπ. Το αμέσως επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι είναι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις μερικές από τις πιο γνωστές μας συναρτήσεις.

Παράδειγμα 1.17 :

1) η συνάρτηση "προηγούμενο" V που ισούται με

$$V(m) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } m = 0 \\ m-1 & \text{εάν } m > 0 \end{cases}$$

είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση διότι ορίζεται τυπικά ως

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(m+1) &= m \end{aligned}$$

2) η συνάρτηση "τροποποιημένη διαφορά" $monus(n,m)$ ή αλλιώς $n \dot{-} m$ που ισούται με

$$n \dot{-} m = \begin{cases} 0 & \text{εάν } n \leq m \\ n-m & \text{εάν } n > m \end{cases}$$

είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση διότι ορίζεται τυπικά ως

$$\begin{aligned} n \dot{-} 0 &= n \\ n \dot{-} (m+1) &= V(n \dot{-} m) \end{aligned}$$

3) η συνάρτηση "πρόσημο" sg, όπου

$$sg(m) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } m = 0 \\ 1 & \text{εάν } m > 0 \end{cases}$$

είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση διότι ορίζεται τυπικά ως

$$\begin{aligned} sg(0) &= 0 \\ sg(m+1) &= 1 \end{aligned}$$

4) η "δύναμη" n^m τυπικά ορίζεται ως

$$\begin{aligned} n^0 &= 1 \\ n^{m+1} &= n \cdot n^m \end{aligned}$$

5) η συνάρτηση "παραγοντικό", $n!$, τυπικά ορίζεται ως

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1) \cdot n! \end{aligned}$$

$\diamond$

Δραστηριότητα 1.4 : Να δείξετε ότι οι ακόλουθες γνωστές συναρτήσεις είναι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις .

α) η συνάρτηση "ο μικρότερος των x, y", $min(x, y)$

β) η συνάρτηση "ο μεγαλύτερος των x, y", $max(x, y)$

γ) η συνάρτηση "απόλυτη τιμή", $|x - y|$ $\diamond$

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι οι συναρτήσεις που παράγονται από μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση με "φραγμένο άθροισμα" και "φραγμένο γινόμενο" είναι επίσης πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις .

Παράδειγμα 1.18 : Έστω g μια $(n+1)$-ορισμάτων πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση . Τότε οι $(n+1)$-ορισμάτων συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_S(x_1, \ldots, x_n, y) &= \sum_{i=0}^{y} g(x_1, \ldots, x_n, i) \\ &= g(x_1, \ldots, x_n, 0) \cdot g(x_1, \ldots, x_n, 1) \cdot \ldots \cdot g(x_1, \ldots, x_n, y), \\ f_P(x_1, \ldots, x_n, y) &= \prod_{i=0}^{y} g(x_1, \ldots, x_n, i) \\ &= g(x_1, \ldots, x_n, 0) \cdot g(x_1, \ldots, x_n, 1) \cdot \ldots \cdot g(x_1, \ldots, x_n, y), \end{aligned}$$

είναι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις διότι τυπικά ορίζονται αντίστοιχα ως εξής για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in N$ και $y \in N$:

$$\begin{aligned} f_S(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n, 0) \\ f_S(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= f_S(x_1, \ldots, x_n, y) + g(x_1, \ldots, x_n, y+1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f_P(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n, 0) \\ f_P(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= f_P(x_1, \ldots, x_n, y) \cdot g(x_1, \ldots, x_n, y+1) \end{aligned}$$

◇

Έστω ότι θέλουμε να ορίσουμε τυπικά την συνάρτηση f με

$$f(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{εάν } y < x \\ 2x & \text{εάν } y = x \\ y & \text{εάν } y > x \end{cases}$$

Ένας βολικός τρόπος για έναν **κατά περίπτωση** ορισμό μιας συνάρτησης όπως η παραπάνω, γίνεται με την χρήση της έννοιας του **κατηγορήματος**. Για παράδειγμα η έκφραση "y μικρότερο του x" είναι ένα κατηγόρημα δυο-ορισμάτων, δηλαδή μια σχέση μεταξύ των y και x. Τυπικά, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.16 : Ένα n-ορισμάτων **κατηγόρημα** $P(x_1, \ldots, x_n)$ στους φυσικούς αριθμούς είναι ένα υποσύνολο του N^n και μπορεί να περιγραφεί με μια συνάρτηση που παίρνει την τιμή 1 για τα στοιχεία του υποσυνόλου και την τιμή 0 διαφορετικά. Λέμε ότι το κατηγόρημα είναι ένα **πρωτόγονο αναδρομικό κατηγόρημα** εάν ορίζεται με μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση . Σε συντομογραφία θα γράφουμε απλά

$$P(x_1, \ldots, x_n) \text{ εάν και μόνο εάν } P(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

Παράδειγμα 1.19 :
1) η σχέση "ίσον", $equal(x,y)$, ισοδύναμα, $x = y$, είναι ένα πρωτόγονο αναδρομικό κατηγόρημα και ορίζεται ως

$$equal(x,y) = 1 \dot{-} sg((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))$$

2) η σχέση "μικρότερο" $less(x,y)$, ισοδύναμα, $x < y$, είναι ένα πρωτόγονο αναδρομικό κατηγόρημα και ορίζεται ως

$$less(x,y) = sg(y \dot{-} x)$$

3) η σχέση "μεγαλύτερο", $greater(x, y)$, ισοδύναμα, $x > y$, είναι ένα πρωτόγονο αναδρομικό κατηγόρημα και ορίζεται ως

$$greater(x, y) = sg(x \dot{-} y)$$

4) η σχέση "είναι μηδέν", $iszero(x)$, δηλαδή 1 εάν και μόνο εάν $x = 0$, είναι επίσης ένα πρωτόγονο αναδρομικό κατηγόρημα και ορίζεται ως

$$\begin{aligned} iszero(0) &= 1, \\ iszero(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

◇

Έχοντας δώσει την έννοια του κατηγορήματος εύκολα αποδεικνύει κανείς ότι μια κατά περίπτωση οριζόμενη συνάρτηση, που χρησιμοποιεί για κάθε περίπτωση i μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση g_i και ένα πρωτόγονο αναδρομικό κατηγόρημα P_i, είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση . Η συνολική συνάρτηση είναι απλά το άθροισμα των γινομένων $g_i P_i$. Για παράδειγμα, η κατά περίπτωση συνάρτηση $f(x, y)$ που δώσαμε παραπάνω είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και ορίζεται ως

$$f(x, y) = (x - y)less(y, x) + 2xequal(y, x) + ygreater(y, x)$$

Με την χρήση κατηγορημάτων, μια συνάρτηση f που προκύπτει από τις συναρτήσεις g και h με τον κανόνα της πρωτόγονης αναδρομής μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα σε μια γραμμή ως

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, y) &= g(x_1, \ldots, x_n)equal(y, 0) + \\ &\quad h(x_1, \ldots, x_n, y-1, f(x_1, \ldots, x_n, y-1))greater(y, 0), \end{aligned}$$

όπου y το όρισμα αναδρομής.

Το γεγονός ότι ένα κατηγόρημα είναι μια συνάρτηση, μας επιτρέπει να συνθέτουμε κατηγορήματα από άλλα, με όμοιο τρόπο που συνθέτουμε συναρτήσεις. Δεδομένου, όμως, ότι τα κατηγορήματα παίρνουν τιμή μόνο 1 ή 0, αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε στην σύνθεσή μας και τους κλασικούς "λογικούς" τελεστές **σύζευξης,** ($\vee$), **διάζευξης,** ($\wedge$) και **άρνησης,** ($\neg$). Είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς ότι οι λογικοί αυτοί τελεστές πάνω σε πρωτόγονα αναδρομικά κατηγορήματα δίνουν πάλι πρωτόγονα αναδρομικά κατηγορήματα. Πράγματι, εάν P και Q είναι πρωτόγονα αναδρομικά κατηγορήματα, τότε τα κατηγορήματα $P \vee Q$, $P \wedge Q$ και $\neg P$ αντιστοιχούν στις πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις $P + Q$, PQ και $1 \dot{-} P$. Επίσης μπορεί κανείς να εφαρμόσει πάνω σε ορίσματα κατηγορημάτων φραγμένους υπαρξιακούς και καθολικούς ποσοδείκτες για να παράγει νέα κατηγορήματα, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.17 : Εάν P είναι ένα $(k+1)$-ορισμάτων κατηγόρημα, τότε η **φραγμένη υπαρξιακή ποσοτικοποίησή** του είναι το $(k+1)$-ορισμάτων κατηγόρημα $P_\exists$ έτσι ώστε, για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in N$ και $y \in N$, $P_\exists(x_1, \ldots, x_n, y) = 1$ εάν και μόνο εάν υπάρχει i, $0 \leq i \leq y$, έτσι ώστε $P(x_1, \ldots, x_n, i) = 1$. Σε συντομογραφία

$$P_\exists(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ εάν και μόνο εάν } \exists\, i \leq y[P(x_1, \ldots, x_n, i)].$$

Παρομοίως, η **φραγμένη καθολική ποσοτικοποίηση** του P είναι εκείνο το $(k+1)$-ορισμάτων κατηγόρημα $P_\forall$ έτσι ώστε $P_\forall(x_1, \ldots, x_n, y) = 1$ εάν και μόνο εάν για κάθε i, $0 \leq i \leq y$, $P(x_1, \ldots, x_n, i) = 1$. Σε συντομογραφία

$$P_\forall(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ εάν και μόνο εάν } \forall\, i \leq y[P(x_1, \ldots, x_n, i)].$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι εάν το P είναι πρωτόγονο αναδρομικό κατηγόρημα τότε και τα $P_\exists$ και $P_\forall$ είναι πρωτόγονα αναδρομικά κατηγορήματα. Πράγματι τα κατηγορήματα αυτά ορίζονται από τις εξής πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις :

$$P_\exists(x_1, \ldots, x_n, y) = 1 \dot{-} \prod_{i=0}^{y} (1 \dot{-} P(x_1, \ldots, x_n, i)),$$

και

$$P_\forall(x_1, \ldots, x_n, y) = \prod_{i=0}^{y} P(x_1, \ldots, x_n, i)$$

αντίστοιχα.

Συχνά είναι ανάγκη να προσδιορίσουμε την μικρότερη τιμή μιας μεταβλητής για την οποία ισχύει μια συγκεκριμένη συνθήκη. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε μια $(n+1)$-ορισμάτων συνάρτηση g και μια συγκεκριμένη επιλογή των $x_1, \cdots, x_n$ και θέλουμε να ξέρουμε την μικρότερη τιμή του $(n+1)$-στού ορίσματος y για την οποία $g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$. Αυτή η τιμή παριστάνεται συνήθως με την έκφραση

$$\mu y[g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0].$$

Εάν τώρα θέλουμε την ελάχιστη τιμή του y με $0 \leq y \leq z$ και $g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$, τότε χρησιμοποιούμε την έκφραση

$$\mu y \leq z[g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0].$$

Το σύμβολο "μ" μπορούμε να το δούμε σαν έναν τελεστή **ελαχιστοποίησης** μιας συνάρτησης και μας επιτρέπει να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση από την ελαχιστοποίηση μιας άλλης σύμφωνα με το ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.18 : Έστω η $(n+1)$-ορισμάτων συνάρτηση g και έστω η $(n+1)$-ορισμάτων συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f(x_1, \cdots, x_n, z) = \begin{cases} \mu y \leq z[g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0] & \text{εάν } \exists\ y \leq z \\ z+1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λέμε ότι η f ορίζεται από την g με **φραγμένη ελαχιστοποίηση**.

Είναι λιγότερο εύκολο αλλά όχι τόσο δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι εάν η g είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση τότε και η φραγμένη ελαχιστοποίηση της f είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση . Ας θυμίσουμε αρχικά ότι η πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση $sg(x)$ είναι ίση με 0 εάν $x = 0$, διαφορετικά ίση με 1. Άρα, η έκφραση

$$\prod_{i=0}^{k}(sg(g(x_1, \ldots, x_n, i))$$

είναι ίση με 1 εάν $g(x_1, \ldots, x_n, i) \neq 0\ \forall\ 0 \leq i \leq k$, διαφορετικά ίση με 0. Με βάση αυτό, η συνάρτηση f είναι ίση με

$$f(x_1, \cdots, x_n, z) = \sum_{k=0}^{z}\prod_{i=0}^{k}(sg(g(x_1, \ldots, x_n, i)),$$

δηλαδή, είναι ακριβώς το πλήθος των τιμών του k, με $0 \leq k \leq y$, που η $g(x_1, \ldots, x_n, i)$ δεν είναι 0 για κανένα i, με $0 \leq i \leq k$. Είναι προφανές ότι ο ισοδύναμος ορισμός της f είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση .

Ο ορισμός της φραγμένης ελαχιστοποίησης μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να ισχύει για οποιαδήποτε συνθήκη για την "ελαχιστοποιούμενη" συνάρτηση g, δηλαδή, η g να είναι ίση με κάποια άλλη πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση h:

$$\mu y \leq z[g(x_1, \cdots, x_n, y) = h(x_1, \cdots, x_n, y)].$$

Και σ' αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση που προκύπτει είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση δεδομένου ότι

$$g(x_1, \cdots, x_n, y) = h(x_1, \cdots, x_n, y)$$

είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη έκφραση που χρησιμοποιεί την πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση "απόλυτη τιμή"

$$|g(x_1, \cdots, x_n, y) - h(x_1, \cdots, x_n, y)| = 0$$

Σε περίπτωση που η συνθήκη είναι ίση με 1 θα γράφουμε απλά

$$\mu y \leq z[g(x_1, \cdots, x_n, y)]$$

ως να θεωρούμε την g κατηγόρημα που αληθεύει.

Παράδειγμα 1.20 :

1) η συνάρτηση “πηλίκο”, $quo(x, y)$, (δηλαδή, το ακέραιο μέρος του πηλίκου της διαίρεσης $y \div x$, για $x \neq 0$, διαφορετικά 0), είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και ορίζεται τυπικά ως

$$quo(x, y) = sg(x)(\mu z \leq y[greater(x(z+1), y)])$$

2) η συνάρτηση “υπόλοιπο”, $rem(x, y)$, (δηλαδή, το υπόλοιπο της διαίρεσης $y \div x$), είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και ορίζεται τυπικά ως

$$rem(x, y) = y \dot{-} x \cdot quo(x, y)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε την $rem(x, y)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} rem(x, 0) &= 0 \\ rem(x, y+1) &= \begin{cases} y+1 & \text{εάν } x = 0 \\ rem(x, y)+1 & \text{εάν } (x \neq 0) \wedge (rem(x, y)+1 < x) \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \end{aligned}$$

που είναι ένας κατά περίπτωση ορισμός.

3) παρουσιάζουμε τέσσερις συναρτήσεις διαιρετότητας:

α) η συνάρτηση “διαιρεί”, $div(x, y)$, που είναι ίση με

$$div(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x, y > 0 \text{ και } rem(x, y) = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και ορίζεται τυπικά ως

$$div(x, y) = (1 \dot{-} (rem(x, y))) \cdot sg(y)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να δούμε την συνάρτηση $div(x, y)$ ως κατηγόρημα $x|y$ με

$$x|y \text{ εάν και μόνο εάν } \exists\ m \leq y[mx = y]$$

β) η συνάρτηση “πλήθος διαιρέτων”, $ndiv(x)$, που ισούται με το πλήθος των διαιρέτων του x, περιλαμβανομένων του 1 και του x, είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και ορίζεται ως

$$ndiv(x) = \sum_{i=0}^{x} div(i, x)$$

γ) η συνάρτηση “πρώτος αριθμός”, $prime(x)$, που ισούται με 1 εάν το x είναι πρώτος αριθμός, διαφορετικά είναι 0, είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και ορίζεται ως

$$prime(x) = equal(ndiv(x), 2)$$

δεδομένου ότι ένας πρώτος αριθμός διαιρείται μόνο από το 1 και τον εαυτόν του. Η τελευταία αυτή πρόταση οδηγεί στον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό με την χρήση κατηγορημάτων:

$$prime(x) \text{ εάν και μόνο εάν } (x \geq 2) \wedge \neg\exists\ z \leq x[z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge z|x]$$

δ) η συνάρτηση "i-στός πρώτος αριθμός", $nprime(i)$, που ισούται με τον i-στό πρώτο αριθμό p_i, (με το 2 να είναι ο p_0), είναι μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και ορίζεται με πρωτόγονη αναδρομή ως εξής, (κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι ο αριθμός $p_i! + 1 = p_0 p_1 \cdots p_i + 1$ δεν είναι διαιρετός από κανέναν από τους πρώτους αριθμούς $p_0, p_1, \ldots, p_i$, πράγμα που σημαίνει ότι ο $nprime(i+1)$ είναι ο μικρότερος αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος με τον $p_i! + 1$ και είναι ο επόμενος του p_i πρώτος αριθμός).

$nprime(0) = 2$

$nprime(i+1) = \mu z \leq (p_i! + 1)[prime(z) \wedge z > nprime(i)]$ ◇

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι οι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις είναι Turing υπολογίσιμες. Το ακόλουθο θεώρημα δίνει τις λεπτομέρειες. Θεωρούμε ότι οι φυσικοί αριθμοί, ορίσματα και τιμές των συναρτήσεων είναι συμβολοσειρές κωδικοποιημένες στο μοναδιαίο σύστημα, δηλαδή $m = I^m$.

Θεώρημα 1.6 : Οι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις είναι Turing υπολογίσιμες.

Απόδειξη: Έστω αρχικά οι μηχανής Turing E, B και A_n, τα γραφήματα ροής των οποίων δίνονται στο Σχήμα 1.18.

α) Η E σβήνει την συμβολοσειρά που είναι αριστερά της κεφαλής μέχρι την επόμενη κενή θέση, δηλαδή από τον σχηματισμό $(s, \# \cdots \# w \underline{\#})$, όπου το w μπορεί να είναι άδειο αλλά δεν περιέχει κενά, παράγει τον σχηματισμό $(h, \# \cdots \underline{\#})$. Η μηχανή Turing E^n σβήνει n διαδοχικές στην ταινία συμβολοσειρές που χωρίζονται από #, με την $E^0 = h$ να σταματά αμέσως.

β) Η B από $(s, \#u\#w\underline{\#})$ παράγει $(h, \#w\underline{\#})$, όπου τα u και w μπορεί να είναι άδεια αλλά δεν περιέχουν κενά. Είναι σαν να σπρώχνει αριστερά όλο το περιεχόμενο της ταινίας, ως ότου "φύγει" από την ταινία η πρώτη συμβολοσειρά.

γ) Η $A_n (n \geq 1)$ αντιγράφει στα δεξιά της κεφαλής εκείνη την συμβολοσειρά που είναι η n-οστή μη κενή συμβολοσειρά στα αριστερά της κεφαλής. Δηλαδή εάν οι συμβολοσειρές $w_1, \ldots, w_n$ δεν περιέχουν #, τότε από τον σχηματισμό $(s, \# \cdots \# w_1 \# w_2 \# \ldots \# w_n \underline{\#})$ παράγεται ο σχηματισμός $(h, \# \cdots \# w_1 \# w_2 \# \ldots \# w_n \# w_1 \underline{\#})$. Παρατηρείστε επίσης ότι η μηχανή A_n^k,(δηλ., $A_n A_n \ldots A_n, k$ μηχανές αντιγραφής στην σειρά), όπου το $k \leq n$, έχει σαν αποτέλεσμα την αντιγραφή της n-οστής μέχρι και της $(n+k-1)$-οστής συμβολοσειράς στα αριστερά της κεφαλής, δηλ., η A_n^k μετατρέπει το $\# w_1 \# w_2 \# \ldots \# w_n \underline{\#}$ σε $\# w_1 \# w_2 \# \ldots \# w_n \# w_1 \# w_2 \# \ldots \# w_k \underline{\#}$. Για $k = 0$, η $A_n^0 = h$, δηλαδή σταματά αμέσως.

$$E : > L \xrightarrow{\overline{\#}} \#$$

$$\begin{array}{l} B : > L_{\#} \longrightarrow L \xrightarrow{\quad \overline{\#} \quad} \# R^2_{\#} S_L \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\, | \xrightarrow{\quad \# \quad} R^2_{\#} S_L \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A_n : > L^n_{\#} \longrightarrow R \xrightarrow{\sigma \neq \overline{\#}} \# R^{n+1}_{\#} \sigma L^{n+1}_{\#} \sigma \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\, | \xrightarrow{\quad \# \quad} R^n_{\#} \end{array}$$

Σχήμα 1.18: Οι μηχανές Turing E, B και A_n

Με την βοήθεια αυτών των μηχανών, είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι οι βασικές συναρτήσεις υπολογίζονται από τις εξής μηχανές Turing:

(1) η σταθερή συνάρτηση $C^{(n)}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m$, υπολογίζεται από μηχανή Turing $M_{C_m} = E^n R I^m R$, που με αρχικό σχηματισμό $(s, \#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\underline{\#})$, σβήνει πρώτα τα n ορίσματα και μετά γράφει την σταθερά I^m και σταματά με σχηματισμό $(h, \#I^m\underline{\#})$.

(2) η προβολική συνάρτηση $P^{(n)}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ υπολογίζεται από την μηχανή Turing $E^{n-i}B^{i-1}$. Εδώ η E^{n-i} μετατρέπει την συμβολοσειρά $\#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\underline{\#}$ σε $\#w_1\#w_2\ldots\#w_i\#$, και μετά η B^{i-1} την μετατρέπει σε $\#w_i\underline{\#}$.

(3) η διαδοχική συνάρτηση $S(x) = x + 1$ υπολογίζεται από την μηχανή Turing IR, η οποία μετασχηματίζει το $\#I^x\underline{\#}$, $(x \geq 0)$ σε $\#I^{x+1}\underline{\#}$.

(4) η συνάρτηση f που προκύπτει από τις Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις $h, g_1, \ldots, g_m$ με σύνθεση, είναι Turing υπολογίσιμη ως εξής. Έστω $M_h, M_{g_1}, \ldots, M_{g_m}$ οι Turing μηχανές που υπολογίζουν τις $h, g_1, \ldots, g_m$, αντίστοιχα. Τότε η συνάρτηση $f = h \circ (g_1, \ldots, g_m)$ για όλα τα $(x_1, \ldots, x_n) \in N^n$, υπολογίζεται από τη μηχανή Turing

$$M_f = A^n_n M_{g_1} A^n_{n+1} M_{g_2} \ldots A^n_{n+m-1} M_{g_m} M_h B^n.$$

Πράγματι, η $A^n_n M_{g_1}$ μετατρέπει την $\#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\underline{\#}$ πρώτα σε

$$\#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\underline{\#}$$

και μετά σε $\#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\#u_1\underline{\#}$, όπου εάν $w_i = I^{x_i}$ για $i = 1, \ldots, n$, τότε $u_1 = I^{g_1(x_1,\ldots,x_n)}$. Παρομοίως, μετά από $A^n_n M_{g_1} A^n_{n+1} M_{g_2} \ldots A^n_{n+m-1} M_h$, η ταινία και η θέση (α) μηχανή F_2

$$\begin{tikzcd} > L \arrow[r, "\overline{\#}"] & \# L \arrow[r, "\overline{\#}"] \arrow[dr, "\#"] & RA^{n+1}_{n+1}L \arrow[l, bend right] \\ & & A^{n}_{n+1} \end{tikzcd}$$

(β) μηχανή F_3

$$\begin{tikzcd} > M_g L_{\#} L \arrow[r, "\overline{\$}"] \arrow[dr, "\$"] & R^2_{\#} M_h \arrow[l, bend right] \\ & R^2_{\#} S_L \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.19: Οι μηχανές Turing (α): F_2 και (β): F_3

της κεφαλής θα είναι ως εξής:

$$\#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\#u_1\#u_2\#\ldots\#u_m\underline{\#}$$

όπου $u_i = I^{g_i(x_1,\ldots,x_n)}$ για $i = 1,\ldots,m$. Αυτό μετατρέπεται στην συνέχεια από την M_h σε $\#w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\#v\underline{\#}$, όπου $v = I^{f(x_1,\ldots,x_n)}$, και τέλος σε $\#v\underline{\#}$ από την B^n.
(5) η συνάρτηση f που προκύπτει από τις Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις g και h με πρωτόγονη αναδρομή είναι Turing υπολογίσιμη από την Turing μηχανή M_f που υπολογίζει ως εξής την $f(x_1,\ldots,x_n,m)$, έτσι ώστε για κάθε $(x_1,\ldots,x_n)\in N^n$,

$$f(x_1,\ldots,x_n,0) = g(x_1,\ldots,x_n)$$

, και για κάθε $(x_1,\ldots,x_n)\in N^k$, και $y = 0,\ldots,m-1$,

$$f(x_1,\ldots,x_n,y+1) = h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y)).$$

Έστω M_g και M_h μηχανές Turing που υπολογίζουν τις g και h, αντίστοιχα, και $\overline{w}$ να συμβολίζει την συμβολοσειρά $w_1\#w_2\#\ldots\#w_n$ των ορισμάτων $x_1,\ldots,x_n$) και I^m η συμβολοσειρά για το όρισμα αναδρομής y. Έστω αρχικά η μηχανή Turing $F_1 = (S_R L^2_{\#})^{n+1}\$R^{n+1}_{\#}$ η οποία μετατρέπει τον αρχικό σχηματισμό $(s,\#\overline{w}\#I^m\underline{\#})$ στον $(q,\$\#\overline{w}\#I^m\underline{\#})$ βάζοντας το σύμβολο \$ στην αρχή της ταινίας. Στην συνέχεια μετασχηματίζουμε την ταινία σε

$$(q,\$\#\overline{w}\#I^{m-1}\#\overline{w}\#I^{m-2}\#\ldots\#\overline{w}\#I^1\#\overline{w}\#I^0\#\overline{w}\underline{\#})$$

με την βοήθεια της μηχανής Turing F_2 του Σχήματος 1.19 (α)

Εξετάζοντας την ταινία βλέπουμε ότι έχουν σχηματιστεί από τα δεξιά προς τα αριστερά, τα απαραίτητα ορίσματα εισόδου για να υπολογιστούν διαδοχικές τιμές της f για διαδοχικές τιμές του ορίσματος αναδρομής y (προτρέπετε ο αναγνώστης/σπουδαστής να διατρέξει το διάγραμμα ροής της F_2. Τους διαδοχικούς αυτούς υπολογισμούς αναλαμβάνει να κάνει η μηχανή Turing του Σχήματος 1.19 (β), η οποία αρχικά υπολογίζει

$$\begin{array}{rcll}
A(2,1) & = & A(1, A(2,0)) \text{ από την εξίσωση} & 1.3 \\
& = & A(1, A(1,1)) & 1.2 \\
& = & A(1, A(0, A(1,0))) & 1.3 \\
& = & A(1, A(0, A(0,1))) & 1.2 \\
& = & A(1, A(0,2)) & 1.1 \\
& = & A(1,3) & 1.1 \\
& = & A(0, A(1,2)) & 1.3 \\
& = & A(0, A(0, A(1,1))) & 1.3 \\
& = & A(0, A(0, A(0, A(1,0)))) & 1.3 \\
& = & A(0, A(0, A(0, A(0,1)))) & 1.2 \\
& = & A(0, A(0, A(0,2))) & 1.1 \\
& = & A(0, A(0,3)) & 1.1 \\
& = & A(0,4) & 1.1 \\
& = & 5 & 1.1
\end{array}$$

Σχήμα 1.20: Βήματα υπολογισμού της Ackermann $A(2,1)$

την f για $y = 0$, με την μηχανή Turing M_g και μετά, εφόσον $m > 0$, για διαδοχικές τιμές του y, μέχρι $y = m - 1$ με την μηχανή Turing M_h. Ο σχηματισμός τερματισμού είναι τότε $(h, \#v_m\underline{\#})$, με $v_m = I^{f(x_1,\ldots,x_n,m)}$. Άρα, η μηχανή M_f που υπολογίζει την f είναι η $F_1F_2F_3$. ∎

Όπως αναφέραμε και στην αρχή αυτού του εδαφίου, η κλάση των πρωτόγονων αναδρομικών συναρτήσεων δεν περιλαμβάνει όλες τις Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση Ackermann που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$A(0,y) = y+1 \tag{1.1}$$
$$A(x+1,0) = A(x,1) \tag{1.2}$$
$$A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y)) \tag{1.3}$$

Διαισθητικά είναι εύκολο να πειστεί κανείς ότι η συνάρτηση αυτή είναι "υπολογίσιμη", δηλαδή ότι η τιμή της $A(x,y)$ μπορεί να ληφθεί μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων υπολογισμού. Για παράδειγμα η $A(2,1)$ υπολογίζεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.20.

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Ackermann αυξάνει γρηγορότερα από κάθε άλλη πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και συνεπώς δεν είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση. Για παράδειγμα, $A(4,0) = 13$ και $A(4,1) = 32765$, ενώ αντίστοιχα η γρήγορα αυξανόμενη πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση $f(4,y) = 2^{f(4,y-1)}$ με $f(4,0) = 1$ δίνει $f(4,1) = 2$ (σημειώστε ότι η τιμή της $f(4,5)$ ξεπερνά το $10^{10.000}$!, ενώ είναι δύσκολο να γράψουμε την τεράστια τιμή της $A(4,5)$). Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι για κάθε πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση f υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε

$$A(k, max(x_1, \ldots, x_n)) > f(x_1, \ldots, x_n) \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in N^n.$$

Με βάση αυτήν τη σχέση, (για τους σκοπούς αυτού του βιβλίου παραλείπουμε την απόδειξη της), εάν δεχθούμε προς στιγμή ότι η συνάρτηση Ackermann είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση , τότε θα πρέπει και για $f = A$ να ισχύει η ανισότητα, δηλαδή, $A(k, max(x,y)) > A(x,y)$, πράγμα που για $x = y = k$ οδηγεί στο άτοπο αποτέλεσμα $A(k,k) > A(k,k)$.

Ένα λιγότερο τυπικό αλλά πειστικό επιχείρημα ότι οι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις είναι γνήσιο υποσύνολο των Turing υπολογίσιμων συναρτήσεων βασίζεται στην **αρχή της διαγωνοποίησης** και στο γεγονός ότι κάθε πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με μια συμβολοσειρά από κάποιο αλφάβητο, που είναι απλά η έκφραση ορισμού της. Αυτό σημαίνει ότι οι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις μπορούν να απαριθμηθούν, για παράδειγμα κατά λεξικογραφική σειρά των συμβολοσειρών που τις ορίζουν. Έστω ότι απαριθμούμε μόνο τις πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις με ένα όρισμα $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ και έστω η συνάρτηση $g(x) = f_x(x) + 1, x \in N$. Μπορούμε να φανταστούμε ότι οι τιμές των διατεταγμένων πρωτόγονων αναδρομικών συναρτήσεων για διαδοχικές τιμές του $x \in N$ σχηματίζουν ένα δισδιάστατο πίνακα όπου στην θέση (i,j) είναι η τιμή της $f_i(j)$. Έτσι οι τιμές της g είναι οι τιμές της διαγωνίου του πίνακα αυξημένες κατά ένα. Συνεπώς η g, που ορίζεται με την βοήθεια Turing υπολογίσιμων συναρτήσεων, είναι Turing υπολογίσιμη, αλλά διαφέρει από κάθε πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση στη θέση της διαγωνίου, άρα δεν ανήκει στην κλάση των πρωτόγονων αναδρομικών συναρτήσεων. Τυπικά το επιχείρημα είναι το εξής: έστω ότι η συνάρτηση g είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση . Συνεπώς θα πρέπει να ισούται με κάποια από τις f. Έστω λοιπόν $g(x) = f_k(x)$. Τότε για $x = k$ θα πρέπει $g(k) = f_k(k) = f_k(k) + 1$, που είναι άτοπο.

Ένας τρόπος να επεκτείνει κανείς την κλάση των πρωτόγονων αναδρομικών συναρτήσεων είναι να απομακρύνει το άνω φράγμα από τον τελεστή ελαχιστοποίησης μ. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.19 : Έστω η $(n+1)$-ορισμάτων συνάρτηση g και έστω η n-ορισμάτων συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} \mu y[g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0] & \text{εάν } \exists\ y \text{ με } g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λέμε ότι η f ορίζεται από την g με **(μη φραγμένη) ελαχιστοποίηση** και θα συμβολίζουμε αυτό με

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \mu y[g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0].$$

Παρόλο που ο παραπάνω ορισμός δίνει πάντα μια ολική συνάρτηση f ο μόνος σίγουρος τρόπος για να την υπολογίσουμε είναι να εφαρμόσουμε μη φραγμένη ελαχιστοποίηση μόνο σε συνάρτηση g που είναι **ελαχιστοποιήσιμη**, δηλαδή σε συνάρτηση για την οποία υπάρχει πάντα y στο οποίο μηδενίζεται (διαφορετικά, ένας αλγόριθμος που δοκιμάζει εάν διαδοχικές τιμές του y μηδενίζουν την g δεν θα τερματίσει). Με βάση αυτά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.20 : Οι **μ-αναδρομικές συναρτήσεις** είναι όλες οι βασικές συναρτήσεις και όλες εκείνες οι συναρτήσεις που μπορούν να ληφθούν απ' αυτές με οποιονδήποτε αριθμό διαδοχικών εφαρμογών των κανόνων συναρτησιακής σύνθεσης, πρωτόγονης αναδρομής και ελαχιστοποίησης ελαχιστοποιήσιμων συναρτήσεων.

Όπως και στην περίπτωση της φραγμένης ελαχιστοποίησης, μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε συνθήκη να ισχύει για την g που ελαχιστοποιούμε.

Παράδειγμα 1.21 :
α) έστω η συνάρτηση $g(x, y) = |x - 3y|$ και έστω η συνάρτηση f που ορίζεται ως

$$f(x) = \mu y[g(x, y) = 0].$$

Τότε η f είναι η συνάρτηση τις οποίας οι τιμές δίνονται από την

$$f(x) = \begin{cases} x \div 3 & \text{εάν } x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

β) έστω η συνάρτηση $g(z)$ που το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι παίρνει την τιμή 0 για ένα άπειρο αριθμό τιμών του ορίσματος z. Έστω η συνάρτηση g' με

$$g'(x, z) = g(z) + (x \dot{-} z),$$

και έστω η συνάρτηση f που ορίζεται ως

$$f(x) = \mu z[g'(x, z) = 0].$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η τιμή της f για δεδομένο x είναι το μικρότερο $z \geq x$ για το οποίο $g(z) = 0$. Σημειώστε ότι η f δεν μπορεί να οριστεί με φραγμένη ελαχιστοποίηση διότι δεν έχουμε επαρκή πληροφορία για την g ώστε να φράξουμε την τιμή του z. Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι για κάθε x πρέπει να υπάρχει κάποιο $z \geq x$ για το οποίο $g(z) = 0$.
γ) ορίζουμε ως ακέραιο λογάριθμο ενός αριθμού $x + 1$ με βάση $b + 2$, $\mathrm{ilog}(b + 2, x + 1)$, $x, b \in N$, τον μικρότερο αριθμό $n \in N$ που πρέπει να υψώσουμε σε δύναμη τη βάση $b + 2$ για να πάρουμε έναν ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο με το $x + 1$, (δηλαδή, στον

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] > R A^{n+1}_{n+1} M_g L \arrow[r, "\overline{\#}"] \arrow[dr, "\#"'] & REI \arrow[l, bend right] \\ & B^n \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.21: Η μηχανή Turing M_μ

συνήθη μαθηματικό συμβολισμό $\mathrm{ilog}(b+2, x+1) = \lceil \log_{b+2}(x+1) \rceil$). Παρόλο που η συνάρτηση του λογαρίθμου είναι πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση , ορίζεται πολύ εύκολα με ελαχιστοποίηση ως εξής:

$$\mathrm{ilog}(b+2, x+1) = \mu n[(1 \dot{-} geaterorequal((b+2)^n, x+1)) = 0].$$

◇

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι και οι μ-αναδρομικές συναρτήσεις είναι Turing υπολογίσιμες. Δεδομένου ότι έχει δειχθεί αυτό για τις πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις , αρκεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση που προκύπτει από την μη φραγμένη ελαχιστοποίηση μιας ελαχιστοποιήσιμης Turing υπολογίσιμης συνάρτησης είναι επίσης Turing υπολογίσιμη. Πράγματι, έστω M_g η μηχανή Turing που υπολογίζει την συνάρτηση $g(x_1, \cdots, x_n, y)$. Τότε η μηχανή Turing M_μ του Σχήματος 1.21 υπολογίζει την συνάρτηση $f(x_1, \cdots, x_n) = \mu y[g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0]$ ως εξής: Η μηχανή R μετατρέπει την αρχική είσοδό από $\#w_1\#\ldots\#w_n\underline{\#}$ σε $\#w_1\#\ldots\#w_n\#\underline{\#}$, (δηλαδή σε $\#w_1\#\ldots\#w_n\#I^0\underline{\#}$), όπου το I^0 αντιστοιχεί στην αρχική τιμή $y = 0$). Στην συνέχεια η μηχανή A^{n+1}_{n+1} αντιγράφει όλη αυτήν την συμβολοσειρά στα δεξιά της κεφαλής και με την μηχανή M_g υπολογίζει την συνάρτηση g. Εάν το αποτέλεσμα δεν είναι μηδέν, σβήνεται, (με τις LRE), και ένα I προσαρτάται στο δεξί άκρο της συμβολοσειράς που είναι στην ταινία, για να προκύψει η επόμενη τιμή του y για τον επόμενο κύκλο υπολογισμού. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να προκύψει ένα αποτέλεσμα μηδέν, οπότε η μηχανή B^n χρησιμοποιείται για να εξαλείψει τα ορίσματα $w_1, \ldots, w_n$ που δεν χρειάζονται και να αφήσει μόνο το αποτέλεσμα $I^{\mu y}$ στην ταινία. Έτσι έχει δειχθεί το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.7 :
Οι μ-αναδρομικές συναρτήσεις είναι Turing υπολογίσιμες

Για την ισοδυναμία μεταξύ Turing υπολογίσιμων συναρτήσεων και μ-αναδρομικών συναρτήσεων απαιτείται και η απόδειξη του παρακάτω αντίστροφου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.8 : Οι Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις είναι μ-αναδρομικές

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω η μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$

που υπολογίζει την συνάρτηση ενός ορίσματος $y = f(x)$, με τα $x, y \in N$ στο μοναδιαίο σύστημα. Τότε υπάρχει υπολογισμός μήκους n βημάτων της μορφής

$$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M C_2 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n,$$

όπου C_0 είναι ο αρχικός σχηματισμός $(s, \#I^x\underline{\#})$ και C_n ο σχηματισμός τερματισμού $(h, \#I^y\underline{\#})$.

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω υπολογισμός της M μπορεί να περιγραφεί από μια μ-αναδρομική συνάρτηση. Προς τούτο θα υιοθετήσουμε αρχικά μια κωδικοποίηση των σχηματισμών της M σε φυσικούς αριθμούς που ορίζεται με μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση . Πράγματι, θεωρούμε τα σύνολα K και Σ ξένα μεταξύ τους με $b = |K| + |\Sigma|$ και ορίζουμε μια απεικόνιση e των στοιχείων του $K \cup \Sigma$ στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, με $e(\#) = 0$ και $e(I) = 1$. Με βάση αυτήν την απεικόνιση θα προσδιορίζουμε τον σχηματισμό $C_i = (q, a_0 a_1 \ldots \underline{a}_k \ldots a_{n-1})$ με την τριάδα των φυσικών αριθμών $(e(q), k, \sum_{i=0}^{n-1} e(a_i) b^i)$, όπου ο πρώτος αριθμός αντιστοιχεί στην κατάσταση της μηχανής, ο δεύτερος αριθμός στον αύξοντα αριθμό της θέσης στην ταινία που είναι η κεφαλή της μηχανής, και ο τρίτος αριθμός στο περιεχόμενο της ταινίας. Παρατηρήστε ότι ο τρίτος αριθμός είναι βάσης b και δίνεται από μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση . Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε την εξής τριάδα για τον αρχικό σχηματισμό C_0 (μη ξεχνάτε ότι $e(\#) = 0$ και $e(I) = 1$),

$$C_0 = (s, \#I^x\underline{\#}) = (e(s), x+1, \sum_{i=1}^{x} b^i).$$

Η τριάδα των αριθμών απεικονίζεται εύκολα σε έναν μόνο φυσικό αριθμό z μέσω μιας κατάλληλης απεικόνισης $z = triplet(x_1, x_2, x_3)$, όπως είναι αυτήν της αρίθμησης κατά Cantor που επινόησε ο Cantor για να δείξει ότι γενικά ένα αριθμήσιμο πλήθος αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο. Θα συμβολίσουμε με $triplet^{-1}(z, i), i = 1, 2, 3$ την αντίστροφη συνάρτηση που παίρνει ένα φυσικό αριθμό z και επιστρέφει, αντίστοιχα, τον πρώτο, τον δεύτερο και τον τρίτο αριθμό της τριάδας που αντιστοιχεί στον z. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι οι συναρτήσεις $triplet$ και $triplet^{-1}$ είναι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις . Δίνεται ως άσκηση παρακάτω.

Έχοντας υπόψη μας την παραπάνω κωδικοποίηση θα δείξουμε ότι ο υπολογισμός της f από την μηχανή Turing M δίνεται από την συνάρτηση

$$f(x) = extract(configuration(x, length(x))),$$

όπου,

1. η συνάρτηση $configuration$ παίρνει τιμές στο N, σύμφωνα με την κατά Cantor κωδικοποίηση, αντιστοιχεί σε σχηματισμό της M και ορίζεται με πρωτόγονη

αναδρομή ως

$$\begin{aligned} configuration(x,0) &= triplet(e(s), x+1, \sum_{i=1}^{x} b^i), \\ configuration(x,m+1) &= next(configuration(x,m)), \end{aligned}$$

2. η συνάρτηση $length(x)$ δίνει το μήκος n του υπολογισμού της M και ορίζεται με μη φραγμένη ελαχιστοποίηση ως

$$length(x) = \mu n[triplet^{-1}(configuration(x,n),1) = e(h)],$$

3. η συνάρτηση $next$ δίνει τον επόμενο σχηματισμό στην ακολουθία υπολογισμού και θα οριστεί παρακάτω ως μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση και,

4. η συνάρτηση $extract$ αποσπά από τον σχηματισμό τερματισμού της M την τιμή y της συνάρτησης, και θα οριστεί παρακάτω επίσης ως μια πρωτόγονη αναδρομική συνάρτηση .

Έστω $z = configuration(x,i)$ ο φυσικός αριθμός που αντιστοιχεί στον σχηματισμό C_i. Τότε οι παρακάτω πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις δίνουν αντίστοιχα τους φυσικούς αριθμούς της κατάστασης, της θέσης της κεφαλής και το περιεχόμενο της ταινίας.

$$state(z) = triplet^{-1}(z,1),$$

$$pos(z) = triplet^{-1}(z,2),$$

$$tape(z) = triplet^{-1}(z,3),$$

και οι παρακάτω συναρτήσεις τις αντίστοιχες τιμές τους για τον επόμενο χρονικά σχηματισμό C_{i+1},

$$nextstate(z) = nextq(state(z), in(z)),$$

$$nextpos(z) = pos(z) + move(state(z), in(z)) \dot{-} 1,$$

$$nexttape(z) = \begin{cases} tape(z) & \text{εάν } (nextpos(z) \neq pos(z)) \vee \\ & out(z) = in(z) \\ tape(z) \dot{-} in(z) b^{pos(z)} + out(z) b^{pos(z)} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου, οι συναρτήσεις in και out δίνουν αντίστοιχα το σύμβολο που διαβάζει η μηχανή από την ταινία και το σύμβολο που τυχόν γράφει στην ταινία, ενώ η συνάρτηση $move$ παίρνει την τιμή 0 εάν η κεφαλή κινηθεί αριστερά, τη τιμή 1 εάν μείνει στην ίδια θέση και την τιμή 2 εάν κινηθεί δεξιά. Οι συναρτήσεις in και out είναι πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις και ισούνται με

$$in(z) = quo(b^{pos(z)}, rem(b^{pos(z)+1}, tape(z)))$$

$$out(z) = output(state(z), in(z))$$

Οι συναρτήσεις $nextq$, $output$ και $move$ εξαρτώνται από την συγκεκριμένη Turing μηχανή. Για παράδειγμα έστω η μηχανή Turing M_{sg} που υπολογίζει την συνάρτηση $sg(x)$. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η συνάρτηση μετάπτωσης της M_{sg} δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα καταστάσεων (οι κενές θέσεις είναι περιπτώσεις που δεν θα συμβούν ποτέ),

	$\#$	I
q_0	(q_1, L)	$--$
q_1	(q_2, R)	$(q_3, \#)$
q_2	$(h, \#)$	$--$
q_3	(q_4, L)	$--$
q_4	(q_5, R)	$(q_3, \#)$
q_5	(q_5, I)	(q_2, R)

Από τον πίνακα έχουμε τους εξής κατά περίπτωση ορισμούς για τις συναρτήσεις $nextq$, $output$ και $move$:

$$nextq(q,a) = \begin{cases} e(q_1) & \text{εάν } q = e(q_0) \wedge a = e(\#) \\ e(q_2) & \text{εάν } (q = e(q_1) \wedge a = e(\#)) \vee (q = e(q_5) \wedge a = e(I) \\ e(q_3) & \text{εάν } (q = e(q_1) \vee q = e(q_4)) \wedge a = e(I) \\ e(q_4) & \text{εάν } q = e(q_3) \wedge a = e(\#) \\ e(q_5) & \text{εάν } (q = e(q_4) \vee q = e(q_5)) \wedge a = e(\#) \\ e(h) & \text{εάν } q = e(q_2) \wedge a = e(\#) \end{cases}$$

$$output(q,a) = \begin{cases} e(\#) & \text{εάν } ((q = e(q_2) \wedge a = e(\#) \vee \\ & \qquad (q = e(q_1) \vee q = e(q_4)) \wedge a = e(I)) \\ e(I) & \text{εάν } q = e(q_5) \wedge a = e(\#) \end{cases}$$

$$move(q,a) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } (q = e(q_0) \vee q = e(q_3)) \wedge a = e(\#) \\ 1 & \text{εάν } ((q = e(q_2) \vee q = e(q_5)) \wedge a = e(\#)) \vee \\ & \qquad (q = e(q_1) \vee q = e(q_4)) \wedge a = e(I) \\ 2 & \text{εάν } ((q = e(q_1) \vee q = e(q_4)) \wedge a = e(\#)) \vee (q = e(q_5) \wedge a = e(I)) \end{cases}$$

Με βάση τις παραπάνω πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $next(z)$, με $z = configuration(x, i)$, ως

$$next(z) = triplet(nextstate(z), nextpos(z), nexttape(z)).$$

Τέλος, και έχοντας υπόψη μας ότι ο σχηματισμός τερματισμού $C_n = (h, \#I^y\underline{\#})$ αντιστοιχεί στην τριάδα $(e(h), y+1, \sum_{i=1}^{y} b^i)$, έπεται ότι η συνάρτηση $extract(z)$, με z τον φυσικό αριθμό που αντιστοιχεί στην παραπάνω τριάδα, δίνει την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και είναι ίση με

$$extract(z) = pos(z) \dot{-} 2.$$

Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι μια Turing υπολογίσιμη συνάρτηση είναι μ-αναδρομική. ■

Δραστηριότητα 1.5 : Να προσδιορίσετε τις πρωτόγονες αναδρομικές συναρτήσεις $triplet(x_1, x_2, x_3)$ και $triplet^{-1}(z, i), i = 1, 2, 3$ που παρουσιάσαμε παραπάνω. Για βοήθειά σας υποδεικνύουμε ότι μια Cantor αρίθμηση ζευγών αριθμών του N^2 είναι η εξής:

$$(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1), \ldots$$

◇

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα του τερματισμού ενός υπολογισμού είναι άλυτο, πράγμα που σημαίνει ότι το ερώτημα εάν μια συνάρτηση είναι ελαχιστοποιήσιμη είναι άλυτο. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι ανοικτό ερώτημα εάν κάποιος ορισμός μιας μ-αναδρομικής συνάρτησης με την χρήση ελαχιστοποίησης πράγματι δρα πάνω σε ελαχιστοποιήσιμη συνάρτηση και κατά συνέπεια, εάν πράγματι ορίζει μια μ-αναδρομική συνάρτηση. Έτσι το επιχείρημα της διαγωνοποίησης δεν μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί μια και δεν μπορούμε να απαριθμήσουμε τις μ-αναδρομικές συναρτήσεις.

1.8 Σύνοψη

Παρουσιάσαμε την μηχανή Turing ως το δυναμικότερο γνωστό μέχρι σήμερα μοντέλο υπολογισμού. Επίσης παρουσιάσαμε τις γραμματικές χωρίς περιορισμούς και τις μ-αναδρομικές συναρτήσεις και αποδείξαμε την ισοδυναμία τους με την μηχανή Turing . Ομοίως δείξαμε την ισοδυναμία της μηχανής Turing με διάφορες παραλλαγές της, όπως μηχανές Turing με περισσότερες από μια κεφαλή ή/και ταινίες, περιλαμβανομένης και της περίπτωσης μη ντετερμινιστικής λειτουργίας. Ορίσαμε τις έννοιες της Turing υπολογίσιμης συνάρτησης, της Turing αποδεκτής και Turing αποφασίσιμης γλώσσας. Δείξαμε ότι κάθε Turing αποφασίσιμη γλώσσα είναι και Turing αποδεκτή, και τονίσαμε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, κάτι που θα αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Επίσης κάναμε νύξη το πως οι έννοιες της Turing υπολογίσιμης συνάρτησης και της Turing αποφασίσιμης γλώσσας συνδέονται με την έννοια του αλγόριθμου. Δείξαμε επίσης πως οι μ-αναδρομικές συναρτήσεις κτίζονται συστηματικά από τις βασικές συναρτήσεις με τις πράξεις της συναρτησιακής σύνθεσης, της πρωτόγονης αναδρομής και της ελαχιστοποίησης.