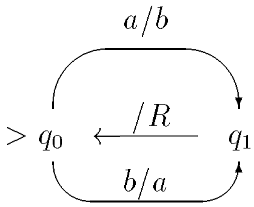


Σχήμα 1.3: Διάγραμμα καταστάσεων της μηχανής Turing του παραδείγματος 1.1

Αυτός ο τελευταίος σχηματισμός (ο οποίος μπορεί να γραφεί πλήρως ως (q_0, e, a, ab)) είναι σχηματισμός κρεμάσματος.

◇

1.2 Σύνθεση μηχανών Turing

Στην προηγούμενη ενότητα δώσαμε παραδείγματα μηχανών Turing με την χρήση του **πίνακα καταστάσεων**. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να δώσουμε μια γραφική παράσταση μιας μηχανής Turing με την χρήση του λεγόμενου **διαγράμματος καταστάσεων**, παρόμοιου με αυτό που χρησιμοποιείται στα πεπερασμένα αυτόματα. Για παράδειγμα στο Σχήμα 1.3, δίνουμε το διάγραμμα καταστάσεων της μηχανής Turing του παραδείγματος 1.1. Ουσιαστικά το διάγραμμα καταστάσεων μιας μηχανής Turing είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος με ονοματισμένους κόμβους τις καταστάσεις της μηχανής Turing . Δυο κόμβοι q και p συνδέονται με μια κατευθυνόμενη ακμή από τον κόμβο q στον κόμβο p εάν υπάρχει μετάπτωση της μορφής $\delta(q,a) = (p,b), a \in \Sigma, q,p \in K$, και $b \in \Sigma \cup \{L,R\}$. Η ακμή επίσης επιγράφεται με το ζεύγος a/b. Η αρχική κατάσταση σημειώνεται με $>$. Σε περίπτωση που από τον κόμβο q στον κόμβο p υπάρχουν περισσότερες από μια ακμές με επιγραφές με το ίδιο b, τότε μπορούμε συνενώσουμε τις ακμές αυτές σε μια με επιγραφή $\sigma_1, \sigma_2, \ldots /b$, όπου τα σ_i είναι τα πρώτα μέλη των ζευγών $\sigma_1/b, \sigma_2/b, \ldots$ (εάν αυτή η μετάπτωση γίνεται για κάθε $\sigma \in \Sigma$ τότε αρκεί μια ακμή με επιγραφή Σ/b ή ισοδύναμα $/b$.

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι και στις δυο μορφές αναπαράστασης μιας μηχανής Turing για να κατανοήσει κανείς το τι κάνει αυτή θα πρέπει να ακολουθήσει νοερά διάφορα "μονοπάτια" μετάπτωσης καταστάσεων, πράγμα που γίνεται πολύπλοκο και δυσνόητο ακόμη και για μικρό αριθμό καταστάσεων. μια απλούστερη μέθοδος είναι να συνθέσουμε μια μηχανή Turing από άλλες απλούστερες, όμοια με την σύνθεση ενός προγράμματος από απλούστερα προγράμματα ή ρουτίνες από μια βιβλιοθήκη. Στην περίπτωσή μας, ξεκινάμε την σύνθεση μας με τις λεγόμενες **βασικές** μηχανές Turing και την λεγόμενη **συνάρτηση ροής**. Οι βασικές μηχανές Turing είναι οι **μηχανές εγγραφής συμβόλου**, M_σ, μια για κάθε σύμβολο σ του αλφάβητου Σ, και οι μηχανές **κίνησης** M_L και M_R. Μια μηχανή Turing εγγραφής συμβόλου M_σ, ξεκινώντας από την αρχική της κατάσταση, με την κεφαλή σε κάποια οποιαδήποτε θέση της ταινίας, ανεξάρτητα τι σύμβολο έχει η ταινία, γράφει στην θέση του το σύμβολο σ και αμέσως σταματά. Τυπικά, μια M_σ με $\sigma \in \Sigma$ ορίζεται ως

$$M_\sigma = (\{s,h\}, \Sigma, \delta, s, h), \text{ με } \delta(s,a) = (h,\sigma) \ \forall a \in \Sigma)$$

Η μηχανή κίνησης M_L, αντίστοιχα, η μηχανή κίνησης M_R, ξεκινώντας από την αρχική της κατάσταση, με την κεφαλή σε οποιαδήποτε θέση της ταινίας, ανεξάρτητα τι σύμβολο έχει η ταινία, κινεί την κεφαλή μια θέση αριστερά, αντίστοιχα δεξιά, και αμέσως σταματά. Τυπικά, η L και η R ορίζονται ως:

$$M_L = (\{s,h\}, \Sigma, \delta, s, h), \text{ με } \delta(\sigma,a) = (h,L) \ \forall a \in \Sigma),$$

$$M_R = (\{s,h\}, \Sigma, \delta, s, h), \text{ με } \delta(\sigma,a) = (h,R) \ \forall a \in \Sigma).$$

Τις βασικές μας μηχανές Turing τις συμπληρώνουμε με δύο ακόμη τετριμμένες μηχανές Turing, την **μηχανή αρχής**, $M_>$, και την **μηχανή τέλους**, M_h, που τυπικά ορίζουμε ως εξής:

$$M_> = (\{s,h\}, \Sigma, \delta, s, h), \text{ με } \delta(s,a) = (h,a) \ \forall a \in \Sigma),$$

$$M_h = (\{h\}, \Sigma, \delta, s, h), \text{ με } \delta(h,a) = (h,a) \ \forall a \in \Sigma).$$

Η $M_>$, αντίστοιχα, η M_h προσδιορίζει την μηχανή Turing με την οποία ξεκινά, αντίστοιχα, τερματίζει, μια σύνθετη μηχανή Turing.

Για λόγους απλούστευσης και όπου δεν πρόκειται να προκαλέσει σύγχυση, τις βασικές μηχανές Turing M_σ, M_L, M_R, $M_>$ και M_h, θα συμβολίζουμε αντίστοιχα με σ, L, R, $>$ και h.

Η συνάρτηση ροής τ είναι αυτή πού ορίζει την σύνθεση μιας νέας μηχανής Turing με βάση ένα σύνολο από άλλες δεδομένες μηχανές Turing. Θεωρούμε ότι όλες οι δεδομένες μηχανές Turing έχουν κοινό αλφάβητο Σ. Η νέα μηχανή Turing ξεκινά να εργάζεται ως μια από τις δεδομένες μηχανές Turing, (δηλαδή ξεκινά από την αρχική κατάσταση αυτής της μηχανής) έστω την M_0, και κάποια δεδομένη συμβολοσειρά εισόδου στην ταινία. Όταν και ποτέ η M_0 πάει να τερματίσει, (δηλαδή όταν φθάσει στην κατάσταση τερματισμού της), τότε η νέα μας μηχανή Turing έχει την δυνατότητα να συνεχίσει ως μια άλλη από τις δεδομένες μηχανές Turing, με την ταινία και την κεφαλή όπως τις άφησε η προηγούμενη μηχανή. Ποια από τις δεδομένες μηχανές Turing είναι η επόμενη να συνεχίσει καθορίζεται από την συνάρτηση ροής τ και το σύμβολο $\sigma \in \Sigma$ που είναι στην θέση της κεφαλής. Γενικά, όταν η νέα μηχανή Turing εργαζόμενη ως μια δεδομένη μηχανή Turing M_i πάει να τερματίσει, εάν ισχύει $\tau(M_i, \sigma) = M_j$, με M_j μια από τις δεδομένες Turing μηχανές, τότε ξεκινά η M_j. Εάν η συνάρτηση τ παίρνει τιμή h, τότε η νέα μας μηχανή Turing τερματίζει οριστικά.

Τυπικά, μια νέα μηχανή Turing M ορίζεται ως $M = (\mathcal{M}, \tau, M_0)$, όπου

$\mathcal{M}$ ένα πεπερασμένο σύνολο δεδομένων μηχανών Turing, με $M, M_h \notin \mathcal{M}$.

τ είναι η **συνάρτηση ροής** από το $\mathcal{M} \times \Sigma$ στο $\mathcal{M} \cup \{M_h\}$.

$M_0 \in \mathcal{M}$ είναι η **αρχική μηχανή Turing** .

Σημειώστε ότι ο παραπάνω ορισμός κρύβει μέσα του αναδρομή, με την έννοια ότι αρχικά κανείς συνθέτει νέες μηχανές Turing με μόνο τις βασικές μηχανές Turing. Στην συνέχεια, όταν έχουμε συνθέσει μια νέα μηχανή Turing μπορούμε να της δώσουμε ένα δικό της συμβολικό όνομα και να την χρησιμοποιήσουμε σε άλλες νέες συνθέσεις μηχανών Turing. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{M}$ μπορεί να μην περιέχει καμιά από τις βασικές μηχανές μας αλλά άλλες σύνθετες.

Γραφικά, μπορούμε να υιοθετήσουμε το λεγόμενο **γράφημα ροής** που είναι ουσιαστικά παρόμοιο με ένα διάγραμμα καταστάσεων μηχανής Turing με την διαφορά ότι οι κόμβοι του είναι δεδομένες μηχανές Turing που συνθέτουν την νέα μηχανή Turing, οι κατευθυνόμενες ακμές αντιστοιχούν στην συνάρτηση ροής $\tau(M_i, \sigma) = M_j$ και φέρουν επιγραφή σ (ή, όπως στο διάγραμμα καταστάσεων, όλα εκείνα τα $\sigma \in \Sigma$ που οδηγούν στην ίδια M_j). Κατά συμπληρωματικό τρόπο, εάν από τον κόμβο M_i συνεχίζει η M_j για όλα τα $\sigma \in \Sigma$ πλην κάποιου $a \in \Sigma$, τότε η αντίστοιχη ακμή επιγράφεται είτε με $\sigma \neq a$ ή με $\overline{a}$. Στην περίπτωση πού από την μηχανή Turing M_i συνεχίζει η μηχανή Turing M_j ανεξάρτητα του σ, δηλαδή για κάθε $\sigma \in \Sigma$, τότε η ακμή δεν φέρει επιγραφή. Ισοδύναμα στην περίπτωση αυτή οι δυο κόμβοι μπορούν να γίνουν ένας με όνομα M_iM_j. Η αρχική μηχανή Turing M_0, σε κάθε περίπτωση σημειώνεται με $>$, ενώ δεν είναι απαραίτητο να απεικονίζουμε με κόμβο και ακμή την μετάβαση στην μηχανή τέλους. Επιπλέον και κατά σύμβαση, εάν από έναν κόμβο M_i δεν υπάρχει ακμή που να μας δείχνει ποια είναι η επόμενη μηχανή, αυτό σημαίνει ότι η σύνθετη μηχανή Turing τερματίζει οριστικά. Τέλος με M^n συμβολίζουμε την περίπτωση όπου μια μηχανή Turing M εκτελείται n συνεχείς φορές.

Παράδειγμα 1.6 : Με βάση τον συμβολισμό γραφήματος μιας μηχανής Turing, δίνουμε στο Σχήμα 1.4 τα γραφήματα διαφόρων μηχανών Turing και εξηγούμε παρακάτω τι κάνουν. Σε όλες τις περιπτώσεις, πλην της (ε), θεωρούμε το αλφάβητο $\Sigma = \{a, b, c, \#\}$:

(α) απεικονίζουμε τις τέσσερις βασικές μηχανές εγγραφής συμβόλου $a, b, c, \#$ και κίνησης L και R.

(β) απεικονίζουμε με τέσσερους ισοδύναμους συμβολισμούς μια μηχανή Turing που κινείται δυο θέσεις δεξιά και σταματά.

(γ) απεικονίζουμε τέσσερις μηχανές Turing που βρίσκουν κενές ή μη κενές θέσεις στην ταινία:

(γ_1) η $R_\#$ βρίσκει την πρώτη κενή θέση δεξιά της παρούσας θέσης της κεφαλής. Αναλυτικότερα, η μηχανή κινεί την κεφαλή της δεξιά και εξετάζει εάν η ταινία στην θέση αυτή περιέχει το κενό σύμβολο #. Εάν ναι, τότε τερματίζει, διαφορετικά επαναλαμβάνει την κίνηση της κεφαλής προς τα δεξιά, κ.ο.κ. Ανάλογη είναι η λειτουργία των επόμενων τριών μηχανών.

(γ_2) η $R_{\overline{\#}}$ βρίσκει την πρώτη μη κενή θέση δεξιά της παρούσας θέσης της κεφαλής

(γ_3) η $L_{\#}$ βρίσκει την πρώτη κενή θέση αριστερά της παρούσας θέσης της κεφαλής

(γ_4) η $L_{\overline{\#}}$ βρίσκει την πρώτη μη κενή θέση αριστερά της παρούσας θέσης της κεφαλής

(δ) απεικονίζουμε μια μηχανή Turing που κινείται την κεφαλή της προς τα δεξιά ως ότου βρει μη κενή θέση, (δηλαδή μια θέση που περιέχει κάποιο σύμβολο $\sigma \neq \#$), οπότε κινείται την κεφαλή μια θέση αριστερά και γράφει εκεί το σύμβολο που βρήκε προηγουμένως, (δηλ., το σ).

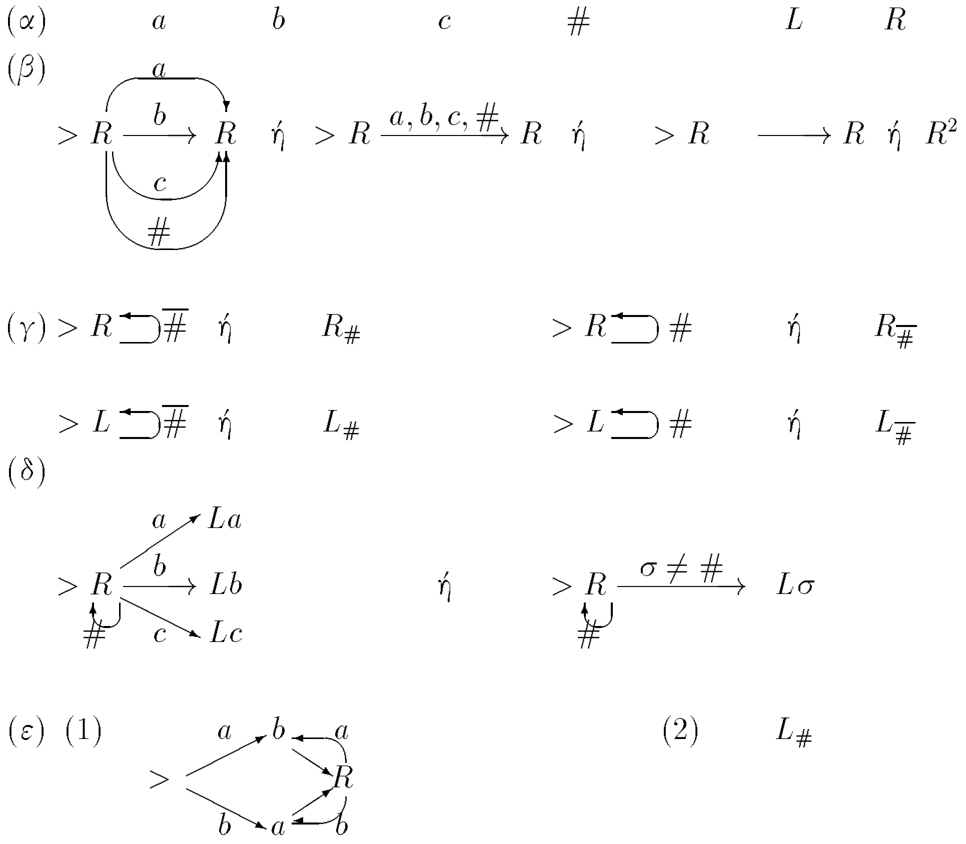
(ε) απεικονίζουμε τις μηχανές Turing των παραδειγμάτων 1.1 και 1.2, όπου $\Sigma = \{a, b\}$. $\diamond$

Παράδειγμα 1.7 : Οι μηχανές Turing αριστερής ολίσθησης και δεξιάς ολίσθησης του Σχήματος 1.5, με συμβολικά ονόματα S_L και S_R, ολισθαίνουν αντίστοιχα κατά μια θέση αριστερά ή δεξιά, την συμβολοσειρά εισόδου w, δηλαδή

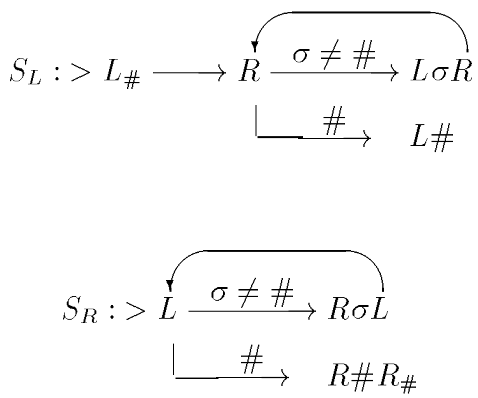
$$\begin{aligned}(s, \#w\underline{\#}) &\vdash_{S_L} (h, w\underline{\#}),\\ (s, \#w\underline{\#}) &\vdash_{S_R} (h, \#\#w\underline{\#}).\end{aligned}$$

Εξετάζοντας το γράφημα ροής της S_L, βλέπουμε ότι αφού πρώτα η κεφαλή κινηθεί στην αρχή της ταινίας (κόμβος $L_{\#}$), στην συνέχεια μεταφέρονται ένα-ένα τα σύμβολα της συμβολοσειράς κατά μια θέση αριστερά, ξεκινώντας από το αριστερό άκρο της. Αυτό γίνεται με επανάληψη του κύκλου των κόμβων R και $L\sigma R$ έως ότου η κεφαλή ξεπεράσει το τέλος της συμβολοσειράς , όπου διαβάζει #, οπότε κινείται αριστερά, κάνει κενό το τελευταίο σύμβολο της συμβολοσειράς - που έχει ήδη μεταφέρει μια θέση αριστερά στην τελευταία επανάληψη του κύκλου - και τερματίζει (κόμβος $L\#$). Αντίθετα, η S_R ξεκινά την μεταφορά των συμβόλων της συμβολοσειράς w ένα-ένα από το δεξιό άκρο της με επανάληψη του κύκλου των κόμβων L και $R\sigma L$ και τερματίζει με την κεφαλή στα δεξιά της μεταφερμένης συμβολοσειράς , αφού πρώτα μετατρέψει σε # την δεύτερη θέση της ταινίας (κόμβος $R\#R_{\#}$). $\diamond$

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.2 : Ο αναγνώστης προτρέπεται να καταγράψει τις διαδοχικές μεταβολές της κατάστασης της ταινίας μετά κάθε κόμβο του γραφήματος ροής των δύο παραπάνω μηχανών Turing ολίσθησης για την συμβολοσειρά εισόδου $\#ab\underline{\#}$.
$\diamond$



Σχήμα 1.4: Γραφήματα ροής μηχανών Turing



Σχήμα 1.5: μηχανές Turing ολίσθησης S_L, S_R

$$\begin{tikzcd} > L_\# \arrow[r] & R \arrow[r, "\sigma \neq \#"] \arrow[dr, "\#"'] & \#R^2_\#\sigma L^2_\#\sigma \arrow[l, bend right] \\ & & R_\# \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.6: Γράφημα μηχανής Turing C

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.3 : Θεωρήστε την μηχανή Turing C με το διάγραμμα ροής του Σχήματος 1.6 και έστω ότι ξεκινά με αρχικό σχηματισμό $(s, \#abc\underline{\#})$. Παρακολουθήστε την λειτουργία της, ακολουθώντας το διάγραμμα ροής της και καταγράφοντας τις διαδοχικές μεταβολές του σχηματισμού μετά από κάθε κόμβο του διαγράμματος (δηλαδή μετά τους κόμβους $L_\#, R, \#R^2_\#\sigma L^2_\#\sigma, R_\#$). Τι κάνει η μηχανή Turing όταν η συμβολοσειρά εισόδου είναι γενικά της μορφής $\#w\#$, όπου η συμβολοσειρά w δεν περιέχει $\#$; Ποιος είναι ο τελικός σχηματισμός; Περιγράψετε με μια πρόταση τι κάνει η μηχανή Turing C γενικά. $\diamond$

1.3 Υπολογισμοί με μηχανές Turing

Στο εδάφιο 1.1 δώσαμε τον ορισμό του "υπολογισμού" σαν μια ακολουθία σχηματισμών της μηχανής Turing . Σ' αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε με πιο συγκεκριμένο τρόπο τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια μηχανή Turing χρησιμοποιείται για να αναγνωρίσει μια γλώσσα ή για να υπολογίσει μια συνάρτηση.

Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι μια γλώσσα L είναι ένα σύνολο συμβολοσειρών από ένα αλφάβητο Σ. Μια συμβολοσειρά είναι μια παράθεση πεπερασμένου πλήθους συμβόλων από το αλφάβητο Σ, δηλαδή $L \subseteq \Sigma^*$. Όπως και στην περίπτωση των πεπερασμένων αυτομάτων, έτσι και για τις μηχανές Turing, μας ενδιαφέρει να τις δούμε σαν μηχανισμούς αναγνώρισης γλωσσών, δηλαδή να μας πούνε εάν μια δοθείσα συμβολοσειρά w ανήκει ή όχι σε μια δοθείσα γλώσσα. Σε ό,τι αφορά τις συναρτήσεις θεωρούμε συναρτήσεις είτε από συμβολοσειρές σε συμβολοσειρές, ή από αριθμούς σε αριθμούς, δηλαδή, είτε $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*$, ή $f : N \mapsto N$, με $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ τους φυσικούς αριθμούς. Η περίπτωση των φυσικών αριθμών ανάγεται εύκολα σ' αυτήν των συμβολοσειρών δεδομένου ότι ένας φυσικός αριθμός n μπορεί να παρασταθεί στο **μοναδιαίο** σύστημα, με την συμβολοσειρά I^n, (το μηδέν αντιστοιχεί στην κενή συμβολοσειρά e), όπου I ένα σύμβολο διαφορετικό του $\#$. Άλλος, πιο γνωστός τρόπος αναπαράστασης φυσικών αριθμών είναι αυτός του δυαδικού συστήματος που χρησιμοποιούμε στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Πράγματι, ένας φυσικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί με μια συμβολοσειρά στο $\{0, 1\}^*$.

Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι η συμβολοσειρά εισόδου w, πάνω στην οποία θα ενεργήσει η μηχανή Turing, τοποθετείται στην αριστερή άκρη της ταινίας μεταξύ δυο κενών συμβόλων, (και φυσικά η συμβολοσειρά εισόδου δεν περιέχει κενά σύμβολα), και η κεφαλή είναι αμέσως στα δεξιά της. Με άλλα λόγια, ο αρχικός σχηματισμός είναι