3.3 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΩΝ

3.3.1 Μορφή Γραμματικών Χωρίς ε-Κανόνες

Ορισμός: Αν $G = \{V, T, R, S\}$ είναι μια ΓρΑΣ, τότε:

- Ένας κανόνας του R λέγεται ε-**κανόνας** αν είναι της μορφής:

$$A \to \varepsilon, \text{ για } A \in V.$$

- Μια μεταβλητή $A \in V$ της G λέγεται **μηδενίσιμη μεταβλητή** αν:

$$A \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon.$$

Θεώρημα: Για κάθε ΓρΑΣ $G = \{V, T, R, S\}$, που περιέχει ε-κανόνες, υπάρχει μια ΓρΑΣ $G' = \{V, T, R', S\}$, χωρίς ε-κανόνες, τέτοια ώστε $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$, δηλαδή, οι παραγόμενες λέξεις από την G' να είναι οι ίδιες που παράγονται από την G, πλήν ενδεχομένως της ε.

Αλγόριθμος Κατασκευής Γραμματικών Χωρίς ε-Κανόνες

Για να κατασκευάσουμε την G' από την G, δηλαδή, για να απαλλαγούμε από τους ε-κανόνες της G, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Σβήνουμε στο R όλους τους ε-κανόνες.
2. Για κάθε κανόνα του R, στο δεξιό μέρος του οποίου υπάρχουν μηδενίσιμες μεταβλητές, προσθέτουμε τους κανόνες που προκύπτουν με το ίδιο αριστερό μέρος αλλά σβήνοντας στο δεξιό μέρος οποιοδήποτε υποσύνολο των μηδενίσιμων μεταβλητών, χωρίς όμως να επιτρέψουμε το αριστερό μέρος να γίνει ε. Π.χ.:

- Αν $A \to BB$, όπου B μηδενίσιμη μεταβλητή, τότε προσθέτουμε τον κανόνα $A \to B$.
- Αν $A \to aBbCa$, όπου B, C μηδενίσιμες μεταβλητές, τότε προσθέτουμε τους κανόνες $A \to aba, A \to abCa, A \to aBba$.

Παράδειγμα 1: Έστω $G = \{V, \{a, b\}, R, S\}$ με $V = \{S, X\}$ και

$$R = \{S \to Xa,\ X \to aX|bX|\varepsilon\}.$$

Για την G, θα βρούμε την αντίστοιχη γραμματική G' χωρίς ε-κανόνες.

Κανόνες της G	Κανόνες της G'
$S \to Xa$	$S \to Xa\vert a$
$X \to aX$	$X \to aX\vert a$
$X \to bX$	$X \to bX\vert b$
$X \to \varepsilon$	—
ε-κανόνες: $X \to \varepsilon$	
Μηδενίσιμες μεταβλητές $= \{X\}$	

Άρα:

$$\begin{aligned} G' &= \{V, \{a, b\}, R', S\}, \\ R' &= \{S \to Xa|a,\ X \to aX|bX|a|b\}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Έστω $G = \{V, \{a, b\}, R, S\}$ με $V = \{S, X, Y, Z, W, A, B\}$ και

$$\begin{aligned} R = \ & \{S \to XY,\ X \to Zb,\ Y \to bW,\ Z \to AB, \\ & W \to Z,\ A \to aA|bA|\varepsilon,\ B \to Ba|Bb|\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Θα βρούμε την αντίστοιχη γραμματική G' χωρίς ε-κανόνες.

Κανόνες της G	Κανόνες της G'
$S \to XY$	$S \to XY$
$X \to Zb$	$X \to Zb\|b$
$Y \to bW$	$Y \to bW\|b$
$Z \to AB$	$Z \to AB\|A\|B$
$W \to Z$	$W \to Z$
$A \to aA$	$A \to aA\|b$
$A \to bA$	$A \to bA\|b$
$A \to \varepsilon$	—
$B \to Ba$	$B \to Ba\|a$
$B \to Bb$	$B \to Bb\|b$
$B \to \varepsilon$	—

ε-κανόνες: $A \to \varepsilon$ και $B \to \varepsilon$

Μηδενίσιμες μεταβλητές $= \{A, B, Z, W\}$

Άρα:

$$\begin{aligned} G' &= \{V, \{a, b\}, R', S\}, \\ R' &= \{S \to XY,\ X \to Zb|b,\ Y \to bW|b,\ Z \to AB|A|B, \\ & \quad W \to Z,\ A \to aA|bA|a|b,\ B \to Ba|Bb|a|b\}. \end{aligned}$$

3.3.2 Μορφή Γραμματικών Χωρίς Μοναδιαίους Κανόνες

Ορισμός: Αν $G = \{V, T, R, S\}$ είναι μια ΓρΑΣ, τότε:

- Ένας κανόνας του R λέγεται **μοναδιαίος** αν είναι της μορφής:

$$A \to B, \text{ για } A, B \in V.$$

- Για $A \in V$, ορίζουμε:

$$\begin{aligned} Unit(A) &= \{B \in V : A \overset{*}{\Rightarrow} B \text{ μόνο μέσω μοναδιαίων κανόνων}\} \\ &= \{B \in V : \text{ υπάρχουν } B_1, B_2, \ldots, B_m \in V \\ & \quad \text{ τ.ώ. } A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_m \Rightarrow B\}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Πάντα $A \in Unit(A)$ (δίοτι $A \overset{*}{\Rightarrow} A$ σε 0 παραγωγές).

Θεώρημα: Για κάθε ΓρΑΣ $G = \{V, T, R, S\}$, που <u>δεν</u> περιέχει ε-κανόνες, υπάρχει μια ΓρΑΣ $G' = \{V', T, R', S\}$ χωρίς μοναδιαίους κανόνες και χωρίς ε-κανόνες τέτοια ώστε $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Αλγόριθμος Κατασκευής Γραμματικών Χωρίς Μοναδιαίους Κανόνες

Για να κατασκευάσουμε την G' από την G, δηλαδή, για να απαλλαγούμε από τους μοναδιαίους κανόνες της G, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Για κάθε $A \in V$, βρίσκουμε το $Unit(A)$.
2. Για κάθε $B \in Unit(A), B \neq A$, τέτοια ώστε $B \to w$ (μη μοναδιαίος κανόνας), προσθέτουμε τον κανόνα $A \to w$.
3. Σβήνουμε όλους τους μοναδιαίους κανόνες του R.

Παράδειγμα 3: Έστω οι κανόνες (με μοναδιαίους):

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A|Aa, \\ A & \to & B, \\ B & \to & C|b, \\ C & \to & D|ab, \\ D & \to & b. \end{array}$$

Πρώτα βρίσκουμε:

$$\begin{array}{lcl} Unit(S) & = & \{S, A, B, C, D\}, \\ Unit(A) & = & \{A, B, C, D\}, \\ Unit(B) & = & \{B, C, D\}, \\ Unit(C) & = & \{C, D\}, \\ Unit(D) & = & \{D\}. \end{array}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{array}{lcl} A \in Unit(S) \text{ αλλά } A \nrightarrow \sigma & \Rightarrow & \text{τίποτε να προσθέσουμε}, \\ B \in Unit(S) \text{ και } B \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } S \to b, \\ C \in Unit(S) \text{ και } C \to ab & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } S \to ab, \\ D \in Unit(S) \text{ και } D \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } (S \to b), \\ B \in Unit(A) \text{ και } B \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } A \to b, \\ C \in Unit(A) \text{ και } C \to ab & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } A \to ab, \\ D \in Unit(A) \text{ και } D \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } (A \to b), \\ C \in Unit(B) \text{ και } C \to ab & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } B \to ab, \\ D \in Unit(B) \text{ και } D \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } B \to b, \\ D \in Unit(C) \text{ και } D \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } C \to b. \end{array}$$

Άρα, σβήνοντας τους μοναδιαίους κανόνες και προσθέτοντας τους νέους κανόνες, το σύνολο των κανόνων χωρίς μοναδιαίους είναι:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & Aa|ab|b, \\ A & \to & ab|b, \\ B & \to & b|ab, \\ C & \to & ab|b, \\ D & \to & b. \end{array}$$

Παράδειγμα 4: Έστω οι κανόνες (με μοναδιαίους):

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A|bb, \\ A & \to & B|b, \\ B & \to & S|a. \end{array}$$

Πρώτα βρίσκουμε:

$$\begin{array}{lcl} Unit(S) & = & \{S, A, B\}, \\ Unit(A) & = & \{A, B, S\}, \\ Unit(B) & = & \{B, S, A\}. \end{array}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{array}{lcl} A \in Unit(S) \text{ αλλά } A \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } S \to b, \\ B \in Unit(S) \text{ και } B \to a & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } S \to a, \\ B \in Unit(A) \text{ και } B \to a & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } A \to a, \\ S \in Unit(A) \text{ και } S \to bb & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } A \to bb, \\ S \in Unit(B) \text{ και } S \to bb & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } B \to bb, \\ A \in Unit(B) \text{ και } A \to b & \Rightarrow & \text{προσθέτουμε } B \to b. \end{array}$$

Άρα, σβήνοντας τους μοναδιαίους κανόνες και προσθέτοντας τους νέους κανόνες, το σύνολο των κανόνων χωρίς μοναδιαίους είναι:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & bb|b|a, \\ A & \to & b|a|bb, \\ B & \to & a|bb|a. \end{array}$$

3.3.3 Κανονική Μορφή Chomsky

Ορισμός: Μια ΓρΑΣ λέγεται ότι είναι στην **κανονική μορφή του Chomsky** αν όλοι οι κανόνες της είναι της μορφής:

- είτε $A \to BC$ (για B, C μεταβλητές),
- είτε $A \to a$ (για a τερματικό, $a \neq \varepsilon$).

Θεώρημα: Για κάθε ΓρΑΣ $G = \{V, T, R, S\}$, υπάρχει μια ΓρΑΣ $G' = \{V', T, R', S\}$ στην κανονική μορφή Chomsky τέτοια ώστε $L(G') = Ł(G) \setminus \{\varepsilon\}$, δηλαδή, οι παραγόμενες λέξεις από την G', είναι οι ίδιες που παράγονται από την G πλήν ενδεχομένως της ε.

Αλγόριθμος Κατασκευής Κανονικής Μορφής Chomsky

Η διαδικασία (αλγόριθμος) παραγωγής της κανονικής μορφής Chomsky συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

	R (κανόνες της G)	R' (κανόνες της G')	V' (μεταβλητές της G')
1.	$A \to BC$ $(A, B, C \in V)$ $A \to \sigma$ $(A \in V, \sigma \in T)$	$A \to BC$ $A \to \sigma$	A, B, C A
2.	$A \to \sigma_1 \sigma_2$ $(A \in V, \sigma_1, \sigma_2 \in T)$	$A \to C_{\sigma_1} C_{\sigma_2}$ $C_{\sigma_1} \to \sigma_1$ $C_{\sigma_2} \to \sigma_2$	$A, C_{\sigma_1}, C_{\sigma_2}$
3.	$A \to B_1 B_2 \cdots B_n$ $(B_1 B_2 \cdots B_n \in V \cup T, n \geqslant 2)$	$A \to B_1 D_1$ $D_1 \to B_2 D_2$ . . $D_{n-3} \to B_{n-2} D_{n-2}$ $D_{n-2} \to B_{n-1} B_n$	$A, B_1, D_1, D_2, \ldots,$ D_{n-2}, B_{n-1}, B_n

Παράδειγμα 5: Έστω $G = \{\{S\}, \{a, b\}, R, S\}$ και

$$R = \{S \to aSa|bSb|aa|bb|a|b\}.$$

Θα βρούμε την κανονική μορφή Chomsky G'.

Κανόνες της G	Κανόνες της G'	Νέες Μεταβλητές της G'
$S \to aSa$	$S \to C_a D_1$ $D_1 \to SC_a$	C_a, D_1
$S \to bSb$	$S \to C_b D_2$ $D_2 \to SC_b$	C_b, D_2
$S \to aa$ $S \to bb$	$S \to C_a C_a \| C_b C_b$ $C_a \to a$ $C_b \to b$	
$S \to a$ $S \to b$	$S \to a$ $S \to b$	

Επομένως, η ζητούμενη κανονική μορφή Chomsky είναι:

$$\begin{aligned} G' &= \{\{S, D_1, D_2, C_a, C_b\}, \{a, b\}, R', S\}, \\ R' &= \{S \to C_a D_1 | C_b D_2 | C_a C_a | C_b C_b, D_1 \to SC_a, \\ &\quad D_2 \to SC_b, C_a \to a, C_b \to b, S \to a|b\}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6: Έστω $G = \{\{S, A, B\}, \{a, b\}, R, S\}$ και

$$R = \{S \to bA|aB,\ A \to bAA|aS|a,\ B \to aBB|bS|b\}.$$

Θα βρούμε την κανονική μορφή Chomsky G'.

Κανόνες της G	Κανόνες της G'	Νέες Μεταβλητές της G'
$S \to bA\|aB$	$S \to C_bA\|C_aB$ $C_a \to a, C_b \to b$	C_a, C_b
$A \to bAA$	$A \to C_bD_1$ $D_1 \to AA$	D_1
$B \to aBB$	$B \to C_aD_2$ $D_2 \to BB$	D_2
$A \to aS$ $B \to bS$	$A \to C_aS$ $B \to C_bS$	
$A \to a$ $B \to b$	$A \to a$ $B \to b$	

Επομένως, η ζητούμενη κανονική μορφή Chomsky είναι:

$$\begin{aligned} G' &= \{\{S, A, B, C_a, C_b, D_1, D_2\}, \{a, b\}, R', S\}, \\ R' &= \{S \to C_bA|C_aB,\ A \to C_aS|C_bD_1|a,\ B \to C_bS|C_aD_2|b, \\ &\quad D_1 \to AA,\ D_2 \to BB,\ C_a \to a,\ C_b \to b\}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε τις αντίστοιχες γραμματικές χωρίς ε-κανόνες:

(i) $S \to aA|B|a,$
$A \to aB|\varepsilon,$
$B \to Aa.$

(ii) $S \to aA|bA|a,$
$A \to aA|bAb|\varepsilon.$

(iii) $S \to AB,$
$A \to aA|abB|aCa,$
$B \to bA|BB|\varepsilon,$
$C \to \varepsilon,$
$D \to dB|BCB.$

(iv) $S \to ABaC,$
$A \to AB,$
$B \to b|\varepsilon,$
$C \to D|\varepsilon,$
$D \to d.$

2. Βρείτε τις αντίστοιχες γραμματικές χωρίς μοναδιαίους κανόνες για:

   $S \to CBa|D,$
   $A \to bbC,$
   $B \to Sc|ddd,$
   $C \to eA|f|C,$
   $D \to E|SABC,$
   $E \to gh.$

3. Βρείτε τις αντίστοιχες γραμματικές χωρίς μοναδιαίους κανόνες (αφού πρώτα απομακρύνετε τους ε-κανόνες) για:

   $S \to Aa|Ba|B,$
   $A \to Aa|\varepsilon,$
   $B \to aA|BB|\varepsilon.$

4. Βρείτε τις κανονικές μορφές Chomsky:

   (i) $S \to AB|CA,$
   $A \to a,$
   $B \to BC|AB,$
   $C \to aB|b.$

   (ii) $S \to aAb|cHB|CH,$
   $A \to dBH|eeC,$
   $B \to ff|D,$
   $C \to gFB|ah,$
   $D \to i,$
   $E \to jF,$
   $F \to dcGGG|cF,$
   $G \to kF,$
   $H \to Hlm.$