

### 3.3 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΩΝ

#### 3.3.1 Μορφή Γραμματικών Χωρίς $\varepsilon$ -Κανόνες

**Ορισμός:** Αν  $G = \{V, T, R, S\}$  είναι μια Γραμματική, τότε:

- Ένας κανόνας του  $R$  λέγεται  $\varepsilon$ -κανόνας αν είναι της μορφής:

$$A \rightarrow \varepsilon, \text{ για } A \in V.$$

- Μια μεταβλητή  $A \in V$  της  $G$  λέγεται **μηδενίσιμη μεταβλητή** αν:

$$A \xRightarrow{*} \varepsilon.$$

**Θεώρημα:** Για κάθε Γραμματική  $G = \{V, T, R, S\}$ , που περιέχει  $\varepsilon$ -κανόνες, υπάρχει μια Γραμματική  $G' = \{V, T, R', S\}$ , χωρίς  $\varepsilon$ -κανόνες, τέτοια ώστε  $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ , δηλαδή, οι παραγόμενες λέξεις από την  $G'$  να είναι οι ίδιες που παράγονται από την  $G$ , πλην ενδεχομένως της  $\varepsilon$ .

#### Αλγόριθμος Κατασκευής Γραμματικών Χωρίς $\varepsilon$ -Κανόνες

Για να κατασκευάσουμε την  $G'$  από την  $G$ , δηλαδή, για να απαλλαγούμε από τους  $\varepsilon$ -κανόνες της  $G$ , ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Σβήνουμε στο  $R$  όλους τους  $\varepsilon$ -κανόνες.
2. Για κάθε κανόνα του  $R$ , στο δεξιό μέρος του οποίου υπάρχουν μηδενίσιμες μεταβλητές, προσθέτουμε τους κανόνες που προκύπτουν με το ίδιο αριστερό μέρος αλλά σβήνοντας στο δεξιό μέρος οποιοδήποτε υποσύνολο των μηδενίσιμων μεταβλητών, χωρίς όμως να επιτρέψουμε το αριστερό μέρος να γίνει  $\varepsilon$ . Π.χ.:
  - Αν  $A \rightarrow BB$ , όπου  $B$  μηδενίσιμη μεταβλητή, τότε προσθέτουμε τον κανόνα  $A \rightarrow B$ .
  - Αν  $A \rightarrow aBbCa$ , όπου  $B, C$  μηδενίσιμες μεταβλητές, τότε προσθέτουμε τους κανόνες  $A \rightarrow aba$ ,  $A \rightarrow abCa$ ,  $A \rightarrow aBba$ .

**Παράδειγμα 1:** Έστω  $G = \{V, \{a, b\}, R, S\}$  με  $V = \{S, X\}$  και

$$R = \{S \rightarrow Xa, X \rightarrow aX|bX|\varepsilon\}.$$

Για την  $G$ , θα βρούμε την αντίστοιχη γραμματική  $G'$  χωρίς  $\varepsilon$ -κανόνες.

Κανόνες της $G$	Κανόνες της $G'$
$S \rightarrow Xa$	$S \rightarrow Xa a$
$X \rightarrow aX$	$X \rightarrow aX a$
$X \rightarrow bX$	$X \rightarrow bX b$
$X \rightarrow \varepsilon$	—
<hr/>	
$\varepsilon$ -κανόνες: $X \rightarrow \varepsilon$	
Μηδενίσιμες μεταβλητές = $\{X\}$	

Άρα:

$$\begin{aligned} G' &= \{V, \{a, b\}, R', S\}, \\ R' &= \{S \rightarrow Xa|a, X \rightarrow aX|bX|a|b\}. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 2:** Έστω  $G = \{V, \{a, b\}, R, S\}$  με  $V = \{S, X, Y, Z, W, A, B\}$  και

$$\begin{aligned} R &= \{S \rightarrow XY, X \rightarrow Zb, Y \rightarrow bW, Z \rightarrow AB, \\ &W \rightarrow Z, A \rightarrow aA|bA|\varepsilon, B \rightarrow Ba|Bb|\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Θα βρούμε την αντίστοιχη γραμματική  $G'$  χωρίς  $\varepsilon$ -κανόνες.

Κανόνες της $G$	Κανόνες της $G'$
$S \rightarrow XY$	$S \rightarrow XY$
$X \rightarrow Zb$	$X \rightarrow Zb b$
$Y \rightarrow bW$	$Y \rightarrow bW b$
$Z \rightarrow AB$	$Z \rightarrow AB A B$
$W \rightarrow Z$	$W \rightarrow Z$
$A \rightarrow aA$	$A \rightarrow aA b$
$A \rightarrow bA$	$A \rightarrow bA b$
$A \rightarrow \varepsilon$	—
$B \rightarrow Ba$	$B \rightarrow Ba a$
$B \rightarrow Bb$	$B \rightarrow Bb b$
$B \rightarrow \varepsilon$	—

$\varepsilon$ -κανόνες:  $A \rightarrow \varepsilon$  και  $B \rightarrow \varepsilon$   
 Μηδενίσιμες μεταβλητές =  $\{A, B, Z, W\}$

Άρα:

$$\begin{aligned} G' &= \{V, \{a, b\}, R', S\}, \\ R' &= \{S \rightarrow XY, X \rightarrow Zb|b, Y \rightarrow bW|b, Z \rightarrow AB|A|B, \\ &W \rightarrow Z, A \rightarrow aA|bA|a|b, B \rightarrow Ba|Bb|a|b\}. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Μορφή Γραμματικών Χωρίς Μοναδιαίους Κανόνες

**Ορισμός:** Αν  $G = \{V, T, R, S\}$  είναι μια Γραμ, τότε:

- Ένας κανόνας του  $R$  λέγεται **μοναδιαίος** αν είναι της μορφής:

$$A \rightarrow B, \text{ για } A, B \in V.$$

- Για  $A \in V$ , ορίζουμε:

$$\begin{aligned} Unit(A) &= \{B \in V : A \xrightarrow{*} B \text{ μόνο μέσω μοναδιαίων κανόνων}\} \\ &= \{B \in V : \text{υπάρχουν } B_1, B_2, \dots, B_m \in V \\ &\text{ τ.ώ. } A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_m \Rightarrow B\}. \end{aligned}$$

**Παρατήρηση:** Πάντα  $A \in Unit(A)$  (δίοτι  $A \xrightarrow{*} A$  σε 0 παραγωγές).

**Θεώρημα:** Για κάθε ΓραΣ  $G = \{V, T, R, S\}$ , που δεν περιέχει  $\varepsilon$ -κανόνες, υπάρχει μια ΓραΣ  $G' = \{V', T, R', S\}$  χωρίς μοναδιαίους κανόνες και χωρίς  $\varepsilon$ -κανόνες τέτοια ώστε  $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ .

### Αλγόριθμος Κατασκευής Γραμματικών Χωρίς Μοναδιαίους Κανόνες

Για να κατασκευάσουμε την  $G'$  από την  $G$ , δηλαδή, για να απαλλαγούμε από τους μοναδιαίους κανόνες της  $G$ , ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Για κάθε  $A \in V$ , βρίσκουμε το  $Unit(A)$ .
2. Για κάθε  $B \in Unit(A), B \neq A$ , τέτοια ώστε  $B \rightarrow w$  (μη μοναδιαίος κανόνας), προσθέτουμε τον κανόνα  $A \rightarrow w$ .
3. Σβήνουμε όλους τους μοναδιαίους κανόνες του  $R$ .

**Παράδειγμα 3:** Έστω οι κανόνες (με μοναδιαίους):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|Aa, \\ A &\rightarrow B, \\ B &\rightarrow C|b, \\ C &\rightarrow D|ab, \\ D &\rightarrow b. \end{aligned}$$

Πρώτα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} Unit(S) &= \{S, A, B, C, D\}, \\ Unit(A) &= \{A, B, C, D\}, \\ Unit(B) &= \{B, C, D\}, \\ Unit(C) &= \{C, D\}, \\ Unit(D) &= \{D\}. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} A \in Unit(S) \text{ αλλά } A \not\rightarrow \sigma &\Rightarrow \text{τίποτε να προσθέσουμε,} \\ B \in Unit(S) \text{ και } B \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } S \rightarrow b, \\ C \in Unit(S) \text{ και } C \rightarrow ab &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } S \rightarrow ab, \\ D \in Unit(S) \text{ και } D \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } (S \rightarrow b), \\ B \in Unit(A) \text{ και } B \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } A \rightarrow b, \\ C \in Unit(A) \text{ και } C \rightarrow ab &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } A \rightarrow ab, \\ D \in Unit(A) \text{ και } D \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } (A \rightarrow b), \\ C \in Unit(B) \text{ και } C \rightarrow ab &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } B \rightarrow ab, \\ D \in Unit(B) \text{ και } D \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } B \rightarrow b, \\ D \in Unit(C) \text{ και } D \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } C \rightarrow b. \end{aligned}$$

Άρα, σβήνοντας τους μοναδιαίους κανόνες και προσθέτοντας τους νέους κανόνες, το σύνολο των κανόνων χωρίς μοναδιαίους είναι:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa|ab|b, \\ A &\rightarrow ab|b, \\ B &\rightarrow b|ab, \\ C &\rightarrow ab|b, \\ D &\rightarrow b. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 4:** Έστω οι κανόνες (με μοναδιαίους):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|bb, \\ A &\rightarrow B|b, \\ B &\rightarrow S|a. \end{aligned}$$

Πρώτα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} Unit(S) &= \{S, A, B\}, \\ Unit(A) &= \{A, B, S\}, \\ Unit(B) &= \{B, S, A\}. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} A \in Unit(S) \text{ αλλά } A \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } S \rightarrow b, \\ B \in Unit(S) \text{ και } B \rightarrow a &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } S \rightarrow a, \\ B \in Unit(A) \text{ και } B \rightarrow a &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } A \rightarrow a, \\ S \in Unit(A) \text{ και } S \rightarrow bb &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } A \rightarrow bb, \\ S \in Unit(B) \text{ και } S \rightarrow bb &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } B \rightarrow bb, \\ A \in Unit(B) \text{ και } A \rightarrow b &\Rightarrow \text{προσθέτουμε } B \rightarrow b. \end{aligned}$$

Άρα, σβήνοντας τους μοναδιαίους κανόνες και προσθέτοντας τους νέους κανόνες, το σύνολο των κανόνων χωρίς μοναδιαίους είναι:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow bb|b|a, \\ A &\rightarrow b|a|bb, \\ B &\rightarrow a|bb|a. \end{aligned}$$

### 3.3.3 Κανονική Μορφή Chomsky

**Ορισμός:** Μια ΓραΣ λέγεται ότι είναι στην **κανονική μορφή του Chomsky** αν όλοι οι κανόνες της είναι της μορφής:

- είτε  $A \rightarrow BC$  (για  $B, C$  μεταβλητές),
- είτε  $A \rightarrow a$  (για  $a$  τερματικό,  $a \neq \varepsilon$ ).

**Θεώρημα:** Για κάθε ΓραΣ  $G = \{V, T, R, S\}$ , υπάρχει μια ΓραΣ  $G' = \{V', T, R', S\}$  στην κανονική μορφή Chomsky τέτοια ώστε  $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ , δηλαδή, οι παραγόμενες λέξεις από την  $G'$ , είναι οι ίδιες που παράγονται από την  $G$  πλην ενδεχομένως της  $\varepsilon$ .

**Αλγόριθμος Κατασκευής Κανονικής Μορφής Chomsky**

Η διαδικασία (αλγόριθμος) παραγωγής της κανονικής μορφής Chomsky συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

	$R$ (κανόνες της $G$ )	$R'$ (κανόνες της $G'$ )	$V'$ (μεταβλητές της $G'$ )
1.	$A \rightarrow BC$ ( $A, B, C \in V$ ) $A \rightarrow \sigma$ ( $A \in V, \sigma \in T$ )	$A \rightarrow BC$ $A \rightarrow \sigma$	$A, B, C$ $A$
2.	$A \rightarrow \sigma_1\sigma_2$ ( $A \in V, \sigma_1, \sigma_2 \in T$ )	$A \rightarrow C_{\sigma_1}C_{\sigma_2}$ $C_{\sigma_1} \rightarrow \sigma_1$ $C_{\sigma_2} \rightarrow \sigma_2$	$A, C_{\sigma_1}, C_{\sigma_2}$
3.	$A \rightarrow B_1B_2 \cdots B_n$ ( $B_1B_2 \cdots B_n \in V \cup T, n \geq 2$ )	$A \rightarrow B_1D_1$ $D_1 \rightarrow B_2D_2$ . . $D_{n-3} \rightarrow B_{n-2}D_{n-2}$ $D_{n-2} \rightarrow B_{n-1}B_n$	$A, B_1, D_1, D_2, \dots,$ $D_{n-2}, B_{n-1}, B_n$

**Παράδειγμα 5:** Έστω  $G = \{\{S\}, \{a, b\}, R, S\}$  και

$$R = \{S \rightarrow aSa | bSb | aa | bb | a|b\}.$$

Θα βρούμε την κανονική μορφή Chomsky  $G'$ .

Κανόνες της $G$	Κανόνες της $G'$	Νέες Μεταβλητές της $G'$
$S \rightarrow aSa$	$S \rightarrow C_aD_1$ $D_1 \rightarrow SC_a$	$C_a, D_1$
$S \rightarrow bSb$	$S \rightarrow C_bD_2$ $D_2 \rightarrow SC_b$	$C_b, D_2$
$S \rightarrow aa$ $S \rightarrow bb$	$S \rightarrow C_aC_a   C_bC_b$ $C_a \rightarrow a$ $C_b \rightarrow b$	
$S \rightarrow a$ $S \rightarrow b$	$S \rightarrow a$ $S \rightarrow b$	

Επομένως, η ζητούμενη κανονική μορφή Chomsky είναι:

$$G' = \{\{S, D_1, D_2, C_a, C_b\}, \{a, b\}, R', S\},$$

$$R' = \{S \rightarrow C_aD_1 | C_bD_2 | C_aC_a | C_bC_b, D_1 \rightarrow SC_a,$$

$$D_2 \rightarrow SC_b, C_a \rightarrow a, C_b \rightarrow b, S \rightarrow a|b\}.$$

**Παράδειγμα 6:** Έστω  $G = \{\{S, A, B\}, \{a, b\}, R, S\}$  και

$$R = \{S \rightarrow bA|aB, A \rightarrow bAA|aS|a, B \rightarrow aBB|bS|b\}.$$

Θα βρούμε την κανονική μορφή Chomsky  $G'$ .

Κανόνες της $G$	Κανόνες της $G'$	Νέες Μεταβλητές της $G'$
$S \rightarrow bA aB$	$S \rightarrow C_bA C_aB$ $C_a \rightarrow a, C_b \rightarrow b$	$C_a, C_b$
$A \rightarrow bAA$	$A \rightarrow C_bD_1$ $D_1 \rightarrow AA$	$D_1$
$B \rightarrow aBB$	$B \rightarrow C_aD_2$ $D_2 \rightarrow BB$	$D_2$
$A \rightarrow aS$ $B \rightarrow bS$	$A \rightarrow C_aS$ $B \rightarrow C_bS$	
$A \rightarrow a$ $B \rightarrow b$	$A \rightarrow a$ $B \rightarrow b$	

Επομένως, η ζητούμενη κανονική μορφή Chomsky είναι:

$$G' = \{\{S, A, B, C_a, C_b, D_1, D_2\}, \{a, b\}, R', S\},$$

$$R' = \{S \rightarrow C_bA|C_aB, A \rightarrow C_aS|C_bD_1|a, B \rightarrow C_bS|C_aD_2|b, D_1 \rightarrow AA, D_2 \rightarrow BB, C_a \rightarrow a, C_b \rightarrow b\}.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε τις αντίστοιχες γραμματικές χωρίς  $\varepsilon$ -κανόνες:

- (i)  $S \rightarrow aA|B|a,$   
 $A \rightarrow aB|\varepsilon,$   
 $B \rightarrow Aa.$
- (ii)  $S \rightarrow aA|bA|a,$   
 $A \rightarrow aA|bAb|\varepsilon.$
- (iii)  $S \rightarrow AB,$   
 $A \rightarrow aA|abB|aCa,$   
 $B \rightarrow bA|BB|\varepsilon,$   
 $C \rightarrow \varepsilon,$   
 $D \rightarrow dB|BCB.$
- (iv)  $S \rightarrow ABaC,$   
 $A \rightarrow AB,$   
 $B \rightarrow b|\varepsilon,$   
 $C \rightarrow D|\varepsilon,$   
 $D \rightarrow d.$

2. Βρείτε τις αντίστοιχες γραμματικές χωρίς μοναδιαίους κανόνες για:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow CBa|D, \\ A &\rightarrow bbC, \\ B &\rightarrow Sc|ddd, \\ C &\rightarrow eA|f|C, \\ D &\rightarrow E|SABC, \\ E &\rightarrow gh. \end{aligned}$$

3. Βρείτε τις αντίστοιχες γραμματικές χωρίς μοναδιαίους κανόνες (αφού πρώτα απομακρύνετε τους  $\varepsilon$ -κανόνες) για:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa|Ba|B, \\ A &\rightarrow Aa|\varepsilon, \\ B &\rightarrow aA|BB|\varepsilon. \end{aligned}$$

4. Βρείτε τις κανονικές μορφές Chomsky:

$$\begin{aligned} (i) \quad S &\rightarrow AB|CA, \\ A &\rightarrow a, \\ B &\rightarrow BC|AB, \\ C &\rightarrow aB|b. \\ (ii) \quad S &\rightarrow aAb|cHB|CH, \\ A &\rightarrow dBH|eeC, \\ B &\rightarrow ff|D, \\ C &\rightarrow gFB|ah, \\ D &\rightarrow i, \\ E &\rightarrow jF, \\ F &\rightarrow dcGGG|cF, \\ G &\rightarrow kF, \\ H &\rightarrow Hlm. \end{aligned}$$