

## 2.3 ΜΗ ΝΤΕΤΕΡΜΕΝΙΣΤΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Στη συνέχεια θα γράφουμε ΝΠΑ σαν τη συντομογραφία του ‘ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτόματου.’

**Ορισμός:** Ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΜΠΑ) είναι μια πεντάδα  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  όπως στον ορισμό του ΝΠΑ με τη μόνη διαφορά ότι τώρα οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση μετάβασης είναι σύνολα καταστάσεων, δηλαδή:

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q.$$

### Ισοδυναμία ΜΠΑ και ΝΠΑ:

**Θεώρημα:** Έστω  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ένα ΜΠΑ που αναγνωρίζει την γλώσσα  $L$ , όπου:

$$Q' = 2^Q \text{ και } q' \in 2^Q, q' = \{q_1, \dots, q_k\} \text{ συμβολίζεται ως } q' = [q_1, \dots, q_k],$$

$\delta': Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$  ορίζεται ως εξής:

$$\delta'([q_1, \dots, q_i], \sigma) = [p_1, \dots, p_j] \Leftrightarrow \delta(\{q_1, \dots, q_i\}, \sigma) = \{p_1, \dots, p_j\},$$

$$\text{όπου } \delta(\{q_1, \dots, q_i\}, \sigma) = \bigcup_{k=1}^i \delta(q_k, \sigma),$$

$$q'_0 = [q_0],$$

$$F' = \{q' \in Q' : q' \cap F \neq \emptyset\}.$$

### Άμεσος Τρόπος Κατασκευής του Αντίστοιχου ΝΠΑ για ένα ΜΠΑ:

Έστω ότι έχουμε ένα ΜΠΑ. Φτιάχνουμε το αντίστοιχο ΝΠΑ ως ένα κατευθυνόμενο γράφο με τον εξής τρόπο:

Θεωρούμε τον πίνακα της συνάρτησης μετάβασης του ΝΠΑ. Οι στήλες του τώρα για  $a$  και  $b$  αποτελούνται από σύνολα, γενικώς, καταστάσεων. Για αυτό το λόγο, ο πίνακας αυτός θα ονομάζεται πίνακας των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης. Οι καταστάσεις σημειώνονται με τους δείκτες και τα σύνολα καταστάσεων γράφονται με τους δείκτες συνεχόμενα χωρίς κόμμα. Π.χ.:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0		
.		
.		
$i$	$kl\dots m$	$rs\dots t$
.		
.		
$n$		

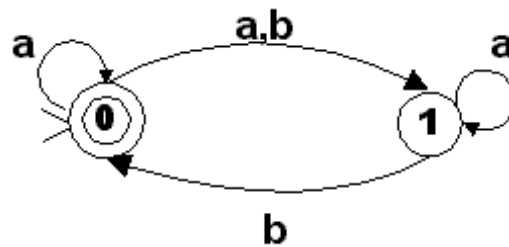
→ Αυτό σημαίνει:  $\delta(q_i, a) = \{q_k, q_l, \dots, q_m\}$   
 $\delta(q_i, b) = \{q_r, q_s, \dots, q_t\}$

Τα στοιχεία των στηλών του  $\delta(q, a)$  και του  $\delta(q, b)$  γίνονται κόμβοι του ΝΠΑ. Ο κόμβος που ακολουθεί έναν κόμβο που αποτελείται από σύνολο καταστάσεων απαρτίζεται από την ένωση των καταστάσεων του συνόλου αυτού. Δηλαδή:

$$\delta(q_{k\dots m}, a) = \delta(q_k, a) \cup \delta(q_l, a) \cup \dots \cup \delta(q_m, a)$$

Συμβολισμός τελικών καταστάσεων: Στον πίνακα των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης, οι τελικές καταστάσεις θα συμβολίζονται με υπογράμμιση.

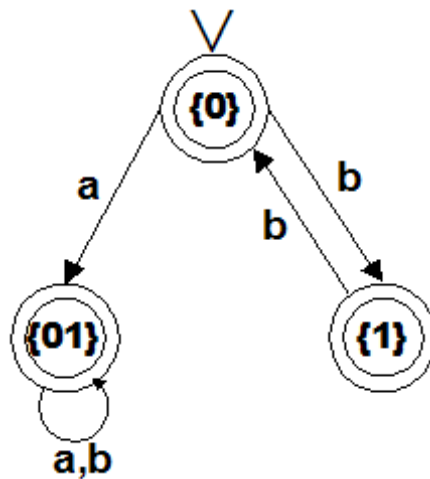
**Παράδειγμα 1:** Έστω το ΜΠΑ:



Ο πίνακας των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης είναι:

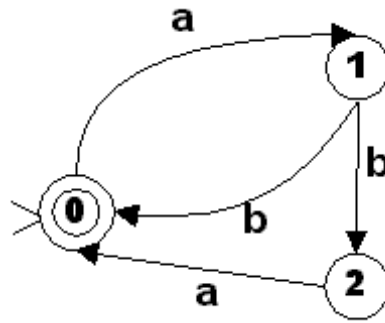
$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	<u>01</u>	1
1	1	<u>0</u>

Άρα, το αντίστοιχο ΝΠΑ είναι:



Προφανώς, οποιαδήποτε λέξη αρχίζει με  $a$  αναγνωρίζεται από το αυτόματο. Όσο για τις λέξεις που αρχίζουν με  $b$ , αναγνωρίζονται αφενός εκείνες που περιέχουν άρτιο πλήθος των  $b$  κι αφετέρου εκείνες που έχουν ένα πρόθεμα της μορφής  $(bb)^*a$ . Επομένως,  $L = (bb)^*(\epsilon + a(a+b)^*)$ .

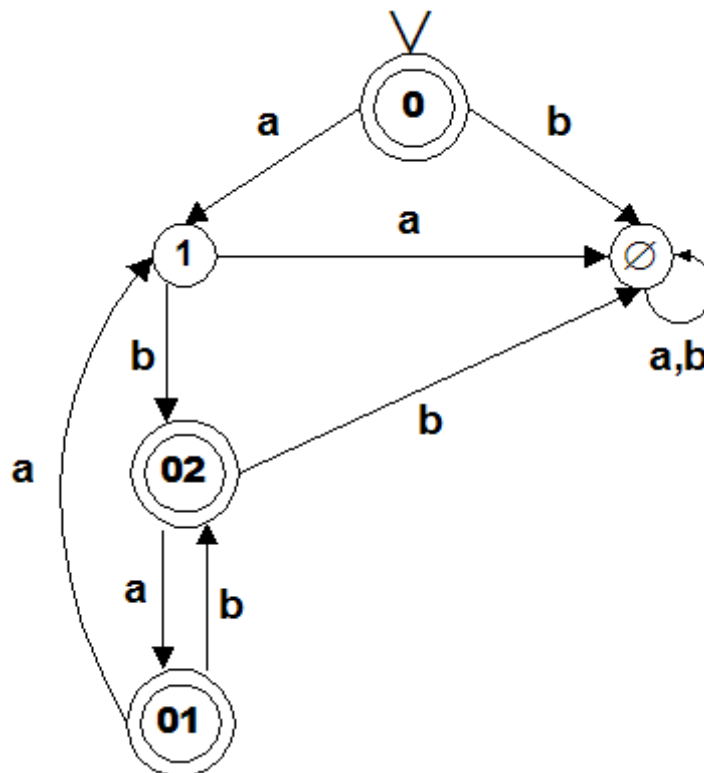
Παράδειγμα 2: Έστω το ΜΠΑ:



Ο πίνακας των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης είναι:

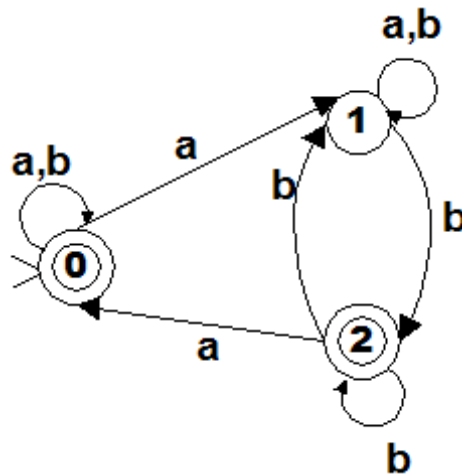
$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	1	$\emptyset$
1	$\emptyset$	<u>02</u>
2	<u>0</u>	$\emptyset$

Άρα, το αντίστοιχο ΝΠΑ είναι:



Προφανώς, οι λέξεις που τερματίζουν είναι οι  $ab, aba$  κι όλες οι συνενώσεις τους. Δηλαδή,  $L = (ab + aba)^*$ .

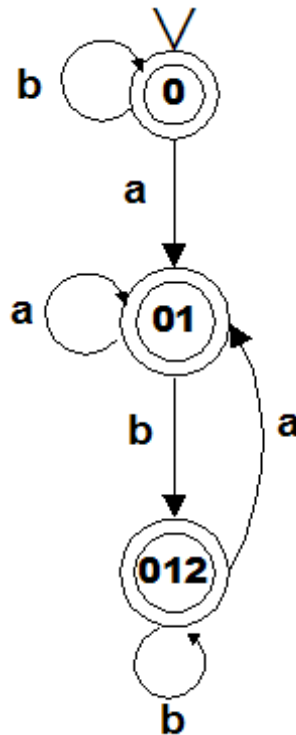
Παράδειγμα 3: Έστω το ΜΠΑ:



Ο πίνακας των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης είναι:

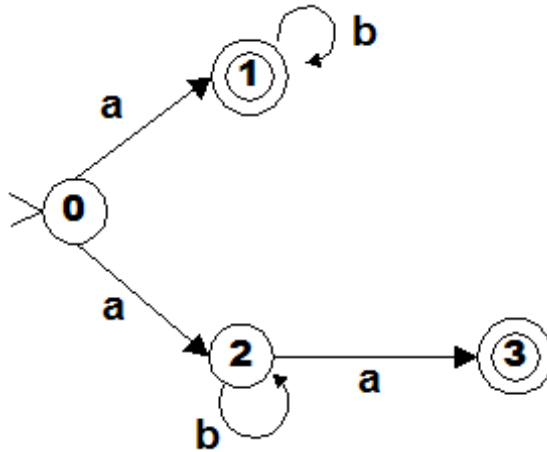
$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	<u>01</u>	<u>0</u>
1	1	<u>12</u>
2	0	<u>12</u>

Άρα, το αντίστοιχο ΝΠΑ είναι:



Επειδή όλες οι καταστάσεις του αυτόματου αυτού είναι τελικές, αναγνωρίζονται όλες οι λέξεις. Δηλαδή, τώρα,  $L = (a + b)^*$ .

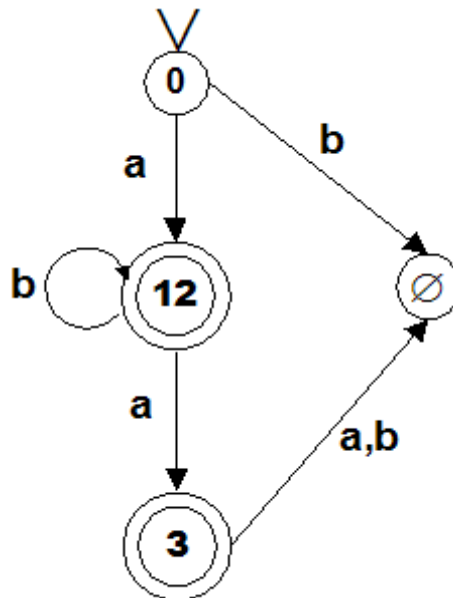
Παράδειγμα 4: Έστω το ΜΠΑ:



Ο πίνακας των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης είναι:

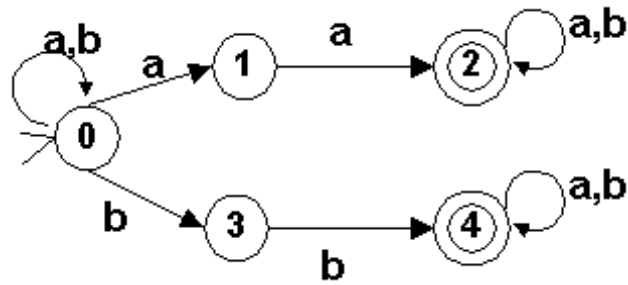
$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	<u>12</u>	$\emptyset$
1	$\emptyset$	<u>1</u>
2	<u>3</u>	2
3	$\emptyset$	$\emptyset$

Άρα, το αντίστοιχο ΝΠΑ είναι:



Προφανώς, η αναγνωριζόμενη γλώσσα είναι  $L = ab^* + ab^*a$ .

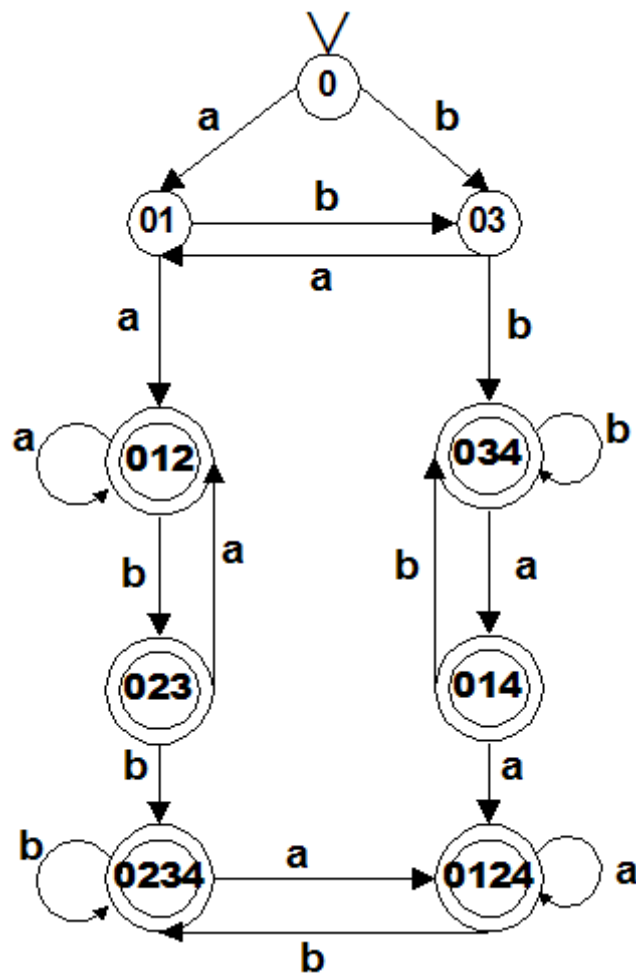
Παράδειγμα 5: Έστω το ΜΠΑ:



Ο πίνακας των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης είναι:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	01	03
1	<u>2</u>	$\emptyset$
2	2	2
3	$\emptyset$	<u>4</u>
4	4	4

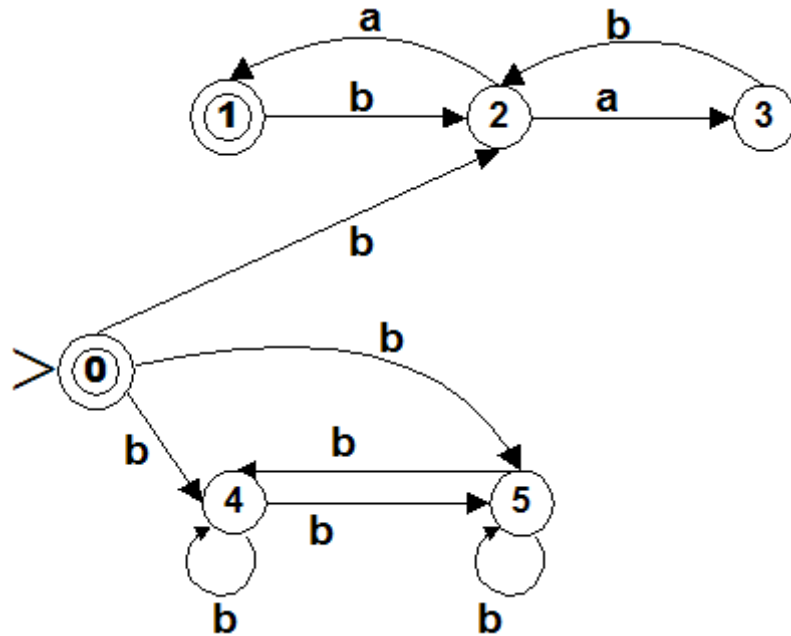
Άρα, το αντίστοιχο ΝΠΑ είναι:



Όσον αφορά την αναγνωριζόμενη γλώσσα, φαίνεται πιο εύκολα ποιά είναι από το αρ-

χικό ΝΠΑ: πρέπει να περιέχει είτε δυο συνεχόμενα  $a$  ή δυο συνεχόμενα  $b$ . Δηλαδή,  $L = (a + b)^*(aa + bb)(a + b)^*$ .

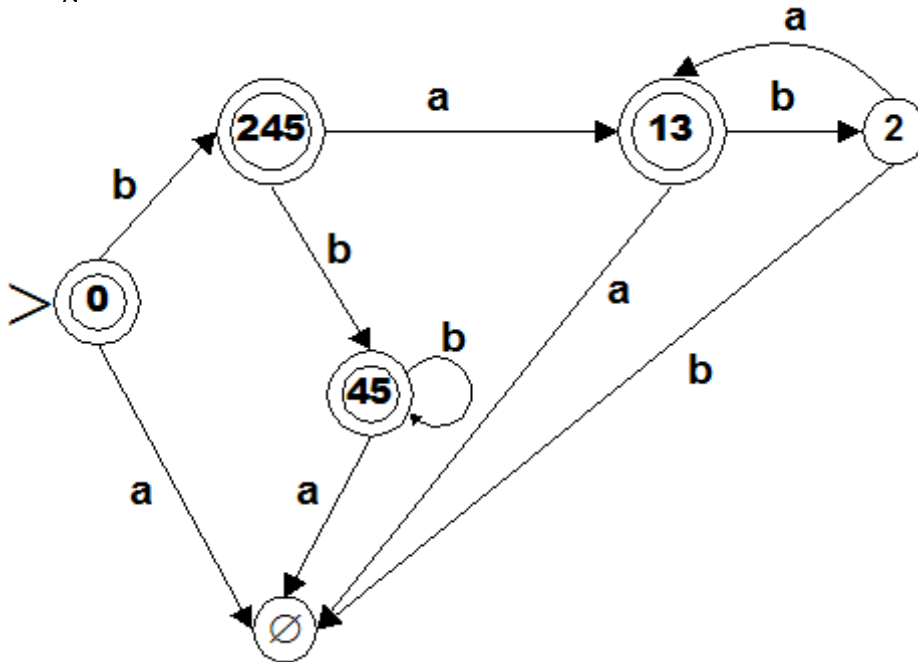
Παράδειγμα 6: Έστω το ΜΠΑ:



Ο πίνακας των συνόλων της συνάρτησης μετάβασης είναι:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	$\emptyset$	<u>245</u>
1	$\emptyset$	2
2	<u>13</u>	$\emptyset$
3	$\emptyset$	2
4	$\emptyset$	<u>45</u>
5	$\emptyset$	<u>45</u>

Άρα, το αντίστοιχο ΝΠΑ είναι:



Προφανώς, η αναγνωριζόμενη γλώσσα είναι  $L = b^* + (ba)^*$ .

### ΜΗ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΜΕ $\varepsilon$ -ΚΙΝΗΣΕΙΣ

**Ορισμός:** Ένα ΜΠΑ με  $\varepsilon$ -κινήσεις (ΜΠΑ- $\varepsilon$ ) είναι ένα ΜΠΑ, στο οποίο μπορούν να γίνονται μεταβάσεις χωρίς ανάγνωση οποιουδήποτε συμβόλου, δηλαδή, με συνάρτηση μετάβασης:

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q.$$

**Θεώρημα:** Για κάθε ΜΠΑ- $\varepsilon$  υπάρχει ένα ΜΠΑ που αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα. Πιο συγκεκριμένα, αν το ΜΠΑ- $\varepsilon$  είναι  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  με  $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ , τότε το ΜΠΑ είναι  $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$ , όπου:

$$\delta'(q, \sigma) = \varepsilon(\delta)\varepsilon(q, \sigma),$$

$$\varepsilon(q) = \{p \in Q: \exists \text{ μονοπάτι } q \rightarrow p \text{ μόνο με } \varepsilon \text{ αναγνώσεις}\},$$

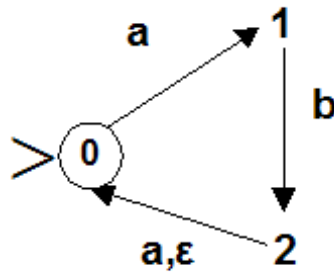
$$\varepsilon(P) = \bigcup_{q \in P} \varepsilon(q), \text{ για } P \in 2^Q,$$

$$q \in \varepsilon(q), \forall q \in Q,$$

$$F' = F \cup \{q \in Q: \varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset\}.$$



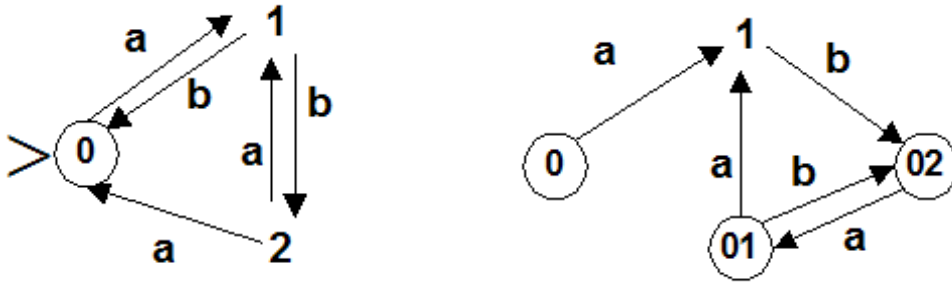
Παράδειγμα 7: Έστω το ΜΠΑ-ε



Ο πίνακας των συνόλων των συναρτήσεων μετάβασης  $\delta$  και  $\delta'$  είναι:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$\delta(q, \varepsilon)$	$\varepsilon(q)$	$\delta(\varepsilon(q), a)$	$\delta(\varepsilon(q), b)$	$\delta'(\varepsilon(q), a)$	$\delta'(\varepsilon(q), b)$
<u>0</u>	1	$\emptyset$	$\emptyset$	<u>0</u>	1	$\emptyset$	1	$\emptyset$
1	$\emptyset$	2	$\emptyset$	1	$\emptyset$	2	$\emptyset$	02
2	0	$\emptyset$	0	<u>02</u>	01	$\emptyset$	01	$\emptyset$

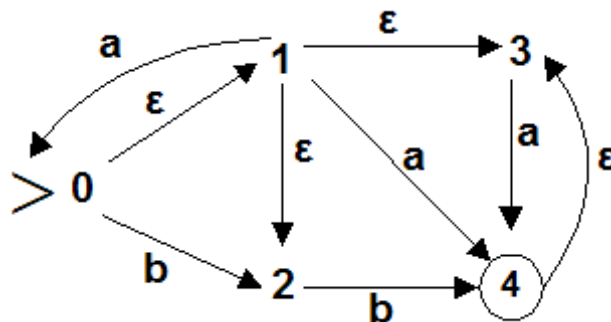
Άρα τα αντίστοιχα ΜΠΑ και ΝΠΑ είναι:



Επομένως, η αναγνωριζόμενη γλώσσα είναι:

$$L = (ab + aba)^*$$

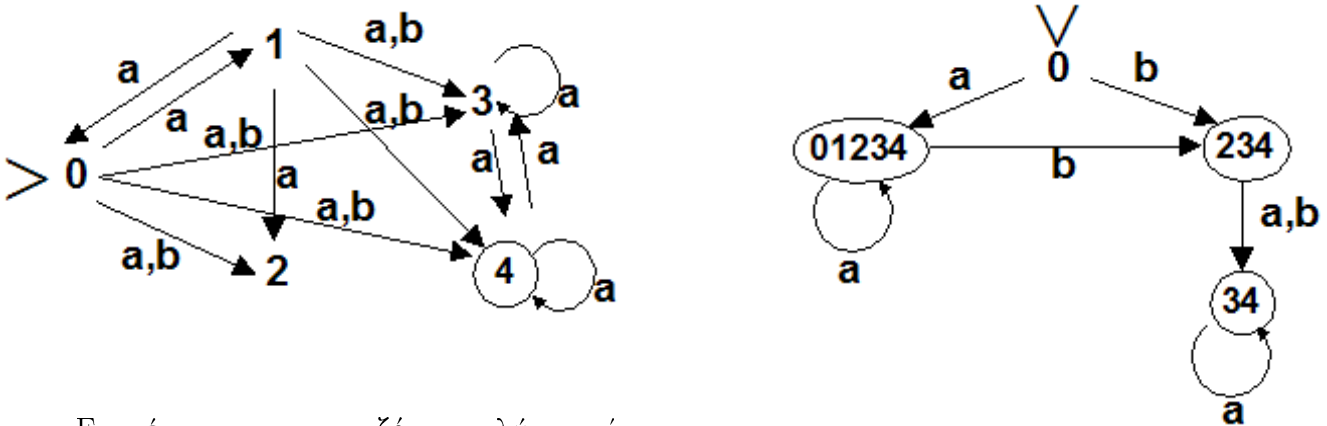
Παράδειγμα 8: Έστω το ΜΠΑ-ε



Ο πίνακας των συνόλων των συναρτήσεων μετάβασης  $\delta$  και  $\delta'$  είναι:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$\delta(q, \varepsilon)$	$\varepsilon(q)$	$\delta(\varepsilon(q), a)$	$\delta(\varepsilon(q), b)$	$\delta'(\varepsilon(q), a)$	$\delta'(\varepsilon(q), b)$
0	$\emptyset$	2	1	0123	04	24	01234	234
1	04	$\emptyset$	23	123	04	4	01234	34
2	$\emptyset$	4	$\emptyset$	2	$\emptyset$	4	$\emptyset$	34
3	4	$\emptyset$	$\emptyset$	3	4	$\emptyset$	34	$\emptyset$
<u>4</u>	$\emptyset$	$\emptyset$	3	<u>34</u>	4	$\emptyset$	34	$\emptyset$

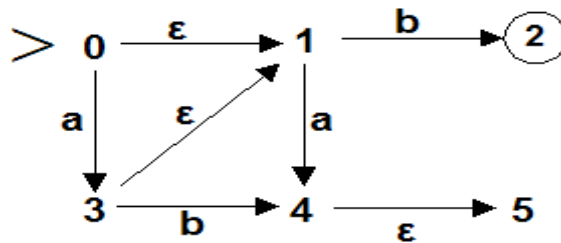
Άρα τα αντίστοιχα ΜΠΑ και ΝΠΑ είναι:



Επομένως, η αναγνωριζόμενη γλώσσα είναι:

$$L = a^*(\varepsilon + ba^* + bba^*).$$

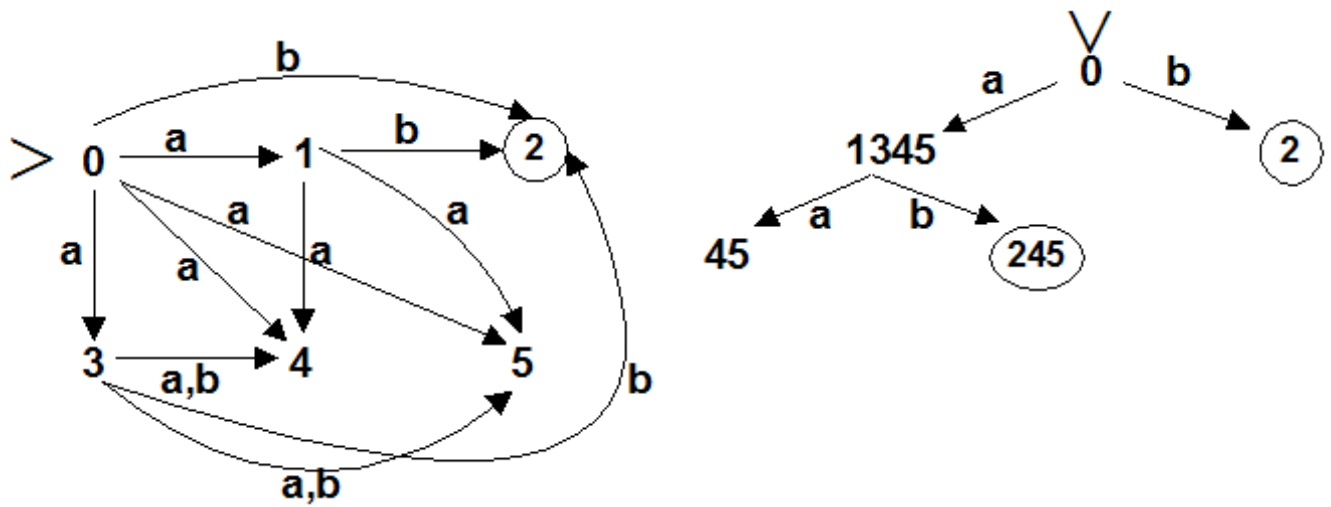
Παράδειγμα 9: Έστω το ΜΠΑ- $\varepsilon$



Ο πίνακας των συνόλων των συναρτήσεων μετάβασης  $\delta$  και  $\delta'$  είναι:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$\delta(q, \varepsilon)$	$\varepsilon(q)$	$\delta(\varepsilon(q), a)$	$\delta(\varepsilon(q), b)$	$\delta'(\varepsilon(q), a)$	$\delta'(\varepsilon(q), b)$
0	3	$\emptyset$	1	01	34	<u>2</u>	1345	<u>2</u>
1	4	2	$\emptyset$	1	4	<u>2</u>	45	<u>2</u>
<u>2</u>	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	4	1	13	4	<u>24</u>	45	<u>245</u>
4	$\emptyset$	$\emptyset$	5	45	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

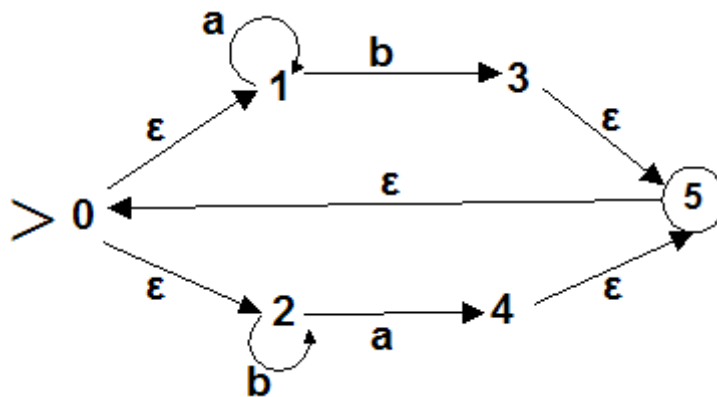
Άρα τα αντίστοιχα ΜΠΑ και ΝΠΑ είναι:



Επομένως, η αναγνωριζόμενη γλώσσα είναι (κάτι που άλλωστε φαίνεται αμέσως από το αρχικό ΜΠΑ-ε):

$$L = b + ab.$$

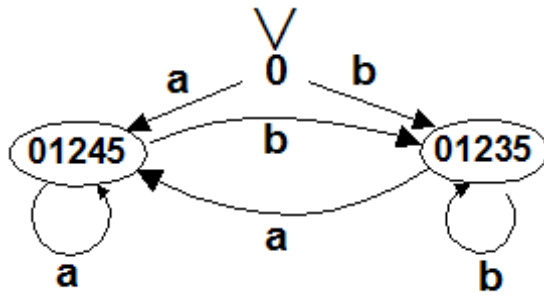
Παράδειγμα 10: Έστω το ΜΠΑ-ε



Ο πίνακας των συνόλων των συναρτήσεων μετάβασης  $\delta$  και  $\delta'$  είναι:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$\delta(q, \varepsilon)$	$\varepsilon(q)$	$\delta(\varepsilon(q), a)$	$\delta(\varepsilon(q), b)$	$\delta'(\varepsilon(q), a)$	$\delta'(\varepsilon(q), b)$
0	$\emptyset$	$\emptyset$	12	012	14	23	<u>01245</u>	<u>01235</u>
1	1	3	$\emptyset$	1	1	3	1	<u>01235</u>
5	4	2	$\emptyset$	2	4	2	<u>01245</u>	2
3	$\emptyset$	$\emptyset$	5	01235	14	23	<u>01245</u>	<u>01235</u>
4	$\emptyset$	$\emptyset$	5	01245	14	23	<u>01245</u>	<u>01235</u>
<u>5</u>	$\emptyset$	$\emptyset$	0	0125	14	23	<u>01245</u>	<u>01235</u>

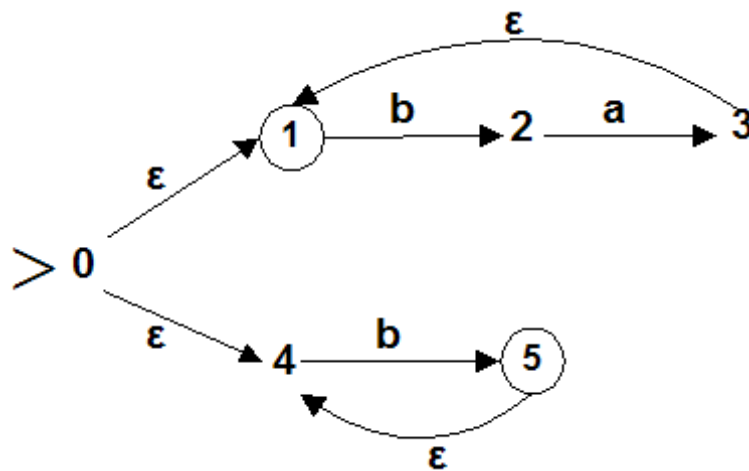
Άρα το αντίστοιχο ΝΠΑ είναι:



Προφανώς, αναγνωρίζονται όλες οι λέξεις πλην της  $\epsilon$ , δηλαδή:

$$L = (a + b)^+.$$

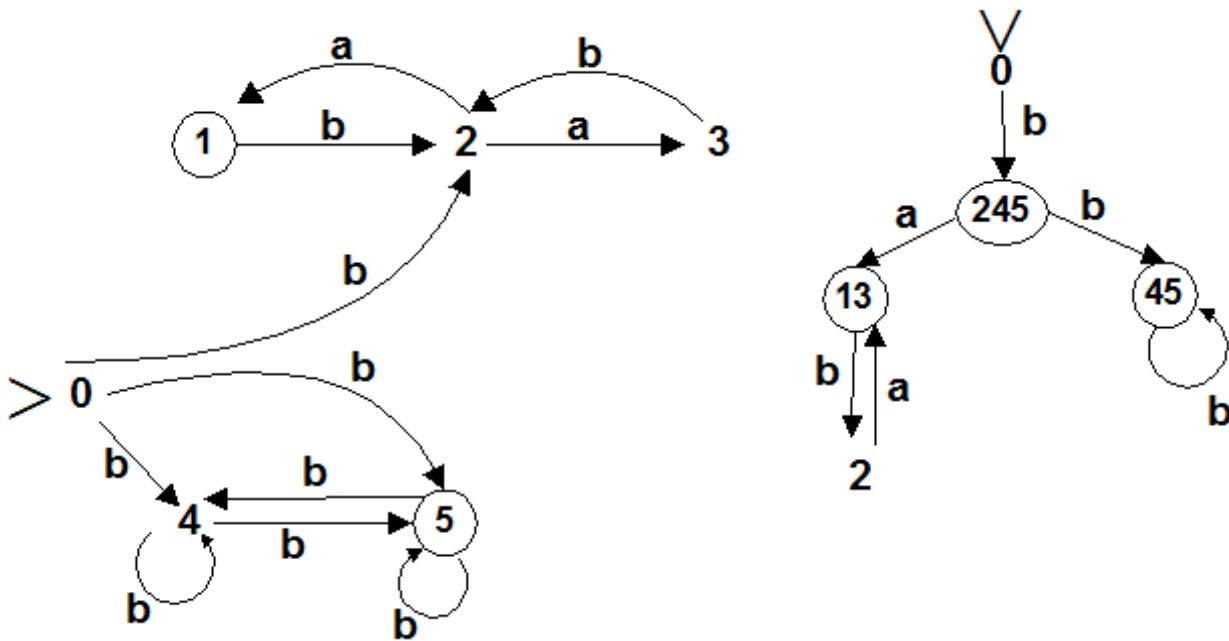
Παράδειγμα 11: Έστω το ΜΠΑ- $\epsilon$



Ο πίνακας των συνόλων των συναρτήσεων μετάβασης  $\delta$  και  $\delta'$  είναι:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$\delta(q, \epsilon)$	$\epsilon(q)$	$\delta(\epsilon(q), a)$	$\delta(\epsilon(q), b)$	$\delta'(\epsilon(q), a)$	$\delta'(\epsilon(q), b)$
0	$\emptyset$	$\emptyset$	14	014	$\emptyset$	25	$\emptyset$	<u>245</u>
<u>1</u>	$\emptyset$	2	$\emptyset$	1	$\emptyset$	2	$\emptyset$	2
5	3	$\emptyset$	$\emptyset$	2	3	$\emptyset$	<u>13</u>	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	1	13	$\emptyset$	2	$\emptyset$	2
4	$\emptyset$	5	$\emptyset$	4	$\emptyset$	5	$\emptyset$	<u>45</u>
<u>5</u>	$\emptyset$	$\emptyset$	4	45	$\emptyset$	5	$\emptyset$	<u>45</u>

Άρα τα αντίστοιχα ΜΠΑ και ΝΠΑ είναι:



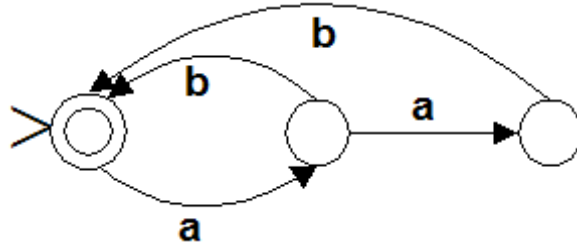
Επομένως, η αναγνωριζόμενη γλώσσα είναι:

$$L = b^+ + (ba)^+.$$

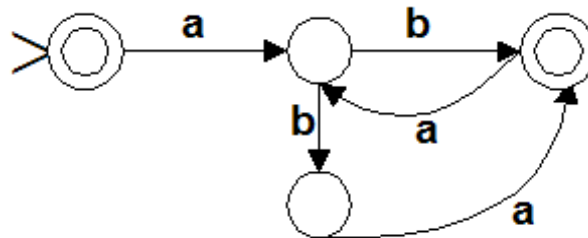
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Να βρεθούν τα ισοδύναμα ΜΠΑ για τα εξής ΝΠΑ:

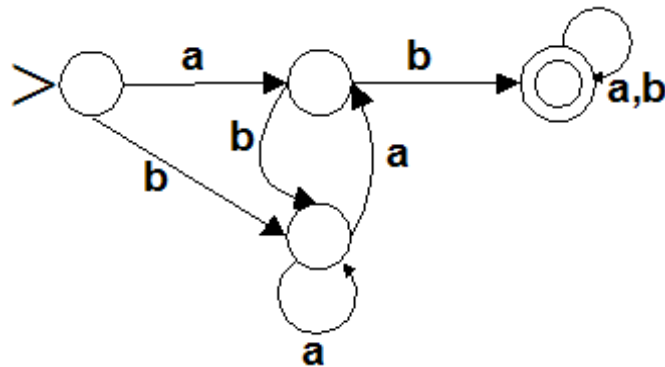
(i)



(ii)



(iii)



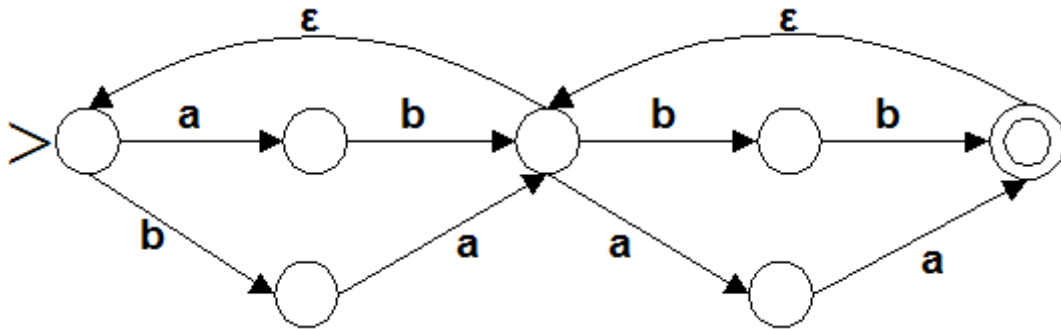
2. Βρείτε τα ΜΠΑ που αναγνωρίζουν τις παρακάτω γλώσσες και κατασκευάστε τα ισοδύναμα ΝΠΑ:

(i)  $L = (ab + aab + aba)^*$ ,

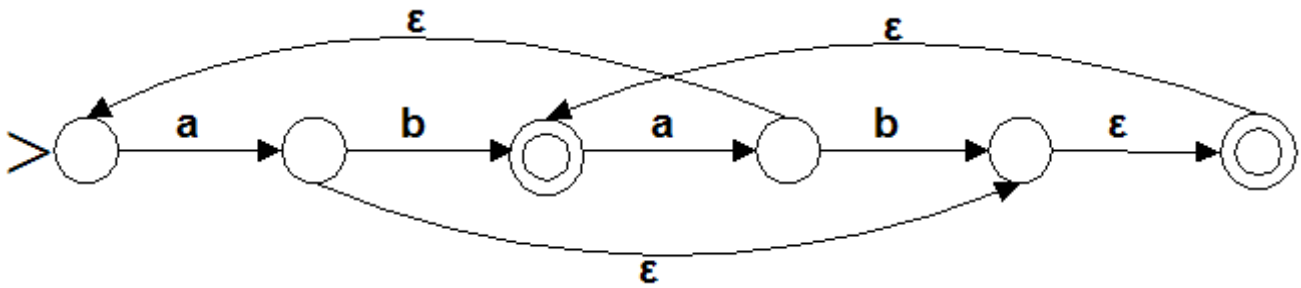
(ii)  $L = (a + b)^* aabab$ .

3. Να βρεθούν τα ισοδύναμα ΜΠΑ για τα εξής ΝΠΑ-ε:

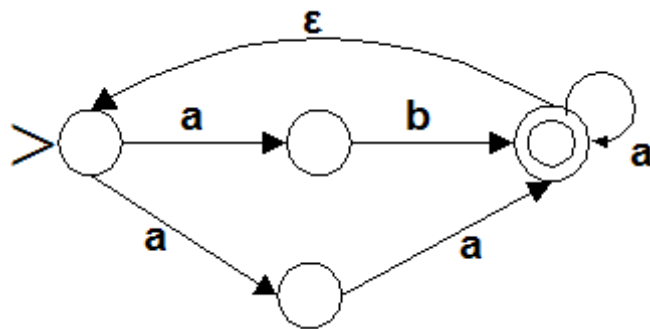
(i)



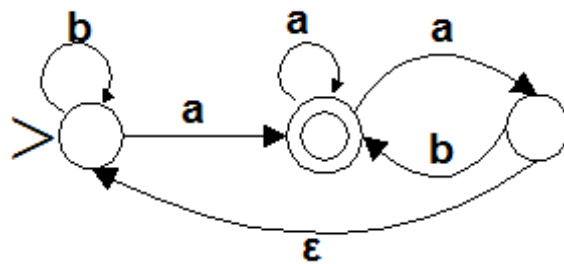
(ii)



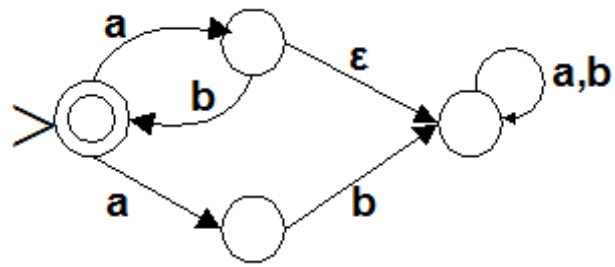
(iii)



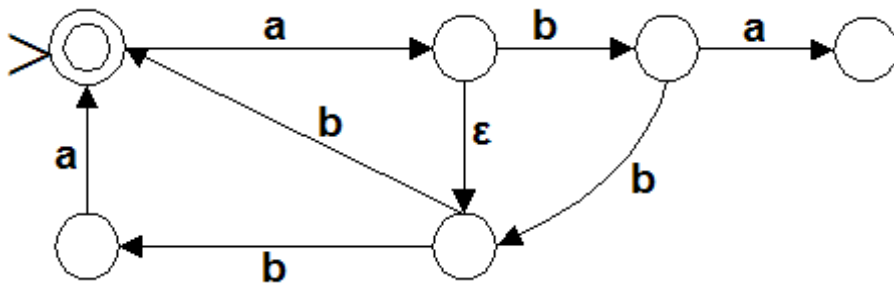
(iv)



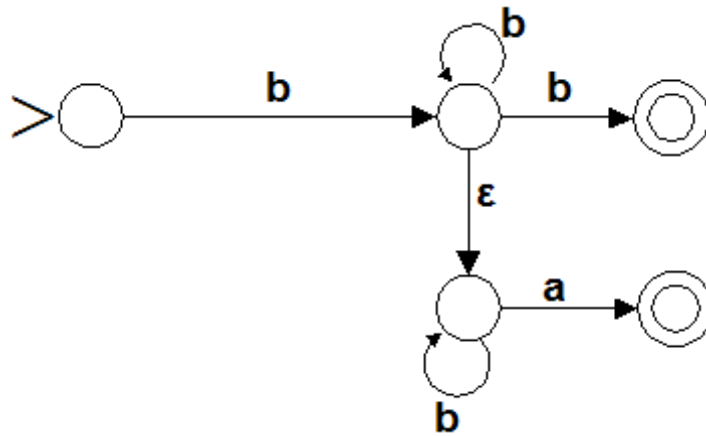
(v)



(vi)



(vii)





(viii)

