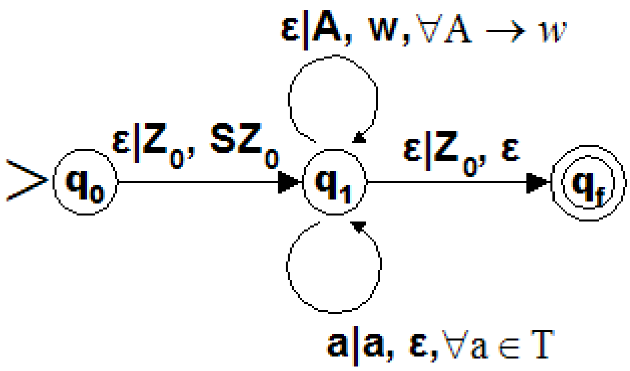
3.6 ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΣΤΟΙΒΑΣ ΚΑΙ ΓρΑΣ

Θεώρημα: Μια γλώσσα L είναι ΓλΑΣ αν και μόνον αν $L = N(M)$, για κάποιο ΑΣ M.

Κατασκευή ΑΣ από ΓρΑΣ

Έστω $G = (V, T, R, S)$ ΓρΑΣ και $L = L(G)$ η παραγόμενη ΓλΑΣ. Θα κατασκευάσουμε ένα ΑΣ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ τέτοιο ώστε $N(M) = L(G)$ ως εξής:

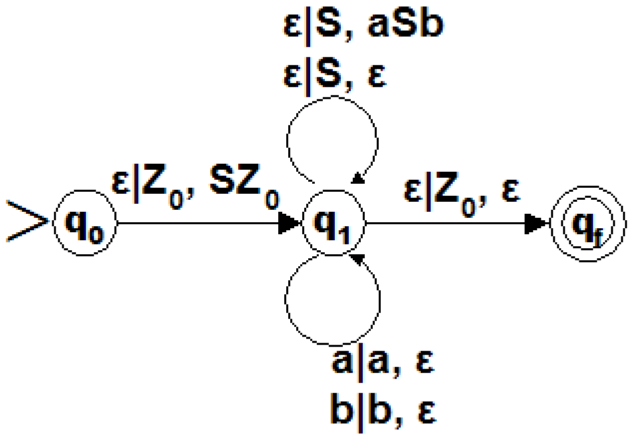
$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_f\}, F = \{q_f\}, \\
\Gamma &= V \cup T \cup \{Z_0\}. \\
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) &= (q_1, SZ_0), \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) &\ni (q_1, w) \text{ αν } A \to w \text{ είναι κανόνας του } R, \\
\delta(q_1, a, a) &\ni (q_1, \varepsilon) \text{ αν } a \in T, \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}
$$



Παράδειγμα 1: Έστω $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb|\varepsilon\}, S)$ η ΓρΑΣ που παράγει την ΓλΑΣ $\{a^i b^i : i \geqslant 0\}$. Θα κατασκευάσουμε το αντίστοιχο ΑΣ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ως εξής:

$$
Q = \{q_0, q_1, q_f\},\ \Sigma = \{a, b\},\ \Gamma = \{S, a, b, Z_0\},\ F = \{q_f\},
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) &= (q_1, SZ_0), \\
\delta(q_1, \varepsilon, S) &= \{(q_1, aSb), (q_1, \varepsilon)\}, \\
\delta(q_1, a, a) &= (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, b, b) &= (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}
$$



Π.χ., η πορεία της λέξης $aaabbb$ είναι:

$$\begin{aligned}(q_0, aaabbb, Z_0) &\vdash (q_1, aaabbb, SZ_0) \vdash (q_1, aaabbb, aSbZ_0) \vdash \\ &\vdash (q_1, aabbb, SbZ_0) \vdash (q_1, aabbb, aSbbZ_0) \vdash \\ &\vdash (q_1, abbb, SbbZ_0) \vdash (q_1, abbb, aSbbbZ_0) \vdash \\ &\vdash (q_1, bbb, SbbbZ_0) \vdash (q_1, bbb, bbbZ_0) \vdash \\ &\vdash (q_1, bb, bbZ_0) \vdash (q_1, b, bZ_0) \vdash \\ &\vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

Κατασκευή ΓρΑΣ από ΑΣ

Έστω το ΑΣ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, για το οποίο *υποθέτουμε* ότι:

- $F = \{q_f\}$ (μόνο μια κατάσταση) και το ΑΣ εισέρχεται στην τελική κατάσταση μόνο με άδεια στοίβα.
- Όλες οι μεταβάσεις είναι της μορφής:

  $$\delta(q, a, A) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},$$

  όπου, για κάθε i,

  $$c_i = (p, \varepsilon) \text{ ή } c_i = (p, BC),$$

  για κάποια $p \in Q, B, C \in \Gamma$.

Θα κατασκευάσουμε μια ΓρΑΣ ως εξής:

$$\begin{aligned}W &= \{[qAp] : q, p \in Q \text{ και } A \in \Gamma\}, \\ S &= [q_0 Z_0 q_f], \\ T &= \Sigma,\end{aligned}$$

κι οι κανόνες του R είναι της μορφής:

- $[qAp] \to a$, όταν $\delta(q, a, A) \ni (p, \varepsilon)$,

- $[q_iAq_m] \rightarrow a[q_jBq_n][q_nCq_m]$, για κάθε n, m τ.ώ. $q_n, q_m \in Q$, όταν $\delta(q_i, a, A) \ni (q_j, BC)$.

Παράδειγμα 2: Έστω το ΑΣ $M = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$ με μεταβάσεις:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_0) &= (q_0, AZ_0), \\
\delta(q_0, a, A) &= (q_0, AA), \\
\delta(q_0, b, A) &= (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, b, A) &= (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) &= (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε την αντίστοιχη ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$ με

$$\begin{aligned}
V &= \{[q_0Aq_0], [q_0Aq_1], [q_0Aq_f] \equiv S, [q_0Z_0q_0], [q_0Z_0q_1], [q_0Z_0q_f], \\
&\quad [q_1Aq_0], [q_1Aq_1], [q_1Aq_f], [q_1Z_0q_0], [q_1Z_0q_1], [q_1Z_0q_f], \\
&\quad [q_fAq_0], [q_fAq_1], [q_fAq_f], [q_fZ_0q_0], [q_fZ_0q_1], [q_fZ_0q_f]\}, \\
T &= \{a, b\},
\end{aligned}$$

όπου οι κανόνες του R παράγονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\text{η μετάβαση } \delta(q_0, b, A) &= (q_1, \varepsilon) \text{ δημιουργεί τον κανόνα } [q_0Aq_1] \rightarrow b, \\
\text{η μετάβαση } \delta(q_1, b, A) &= (q_1, \varepsilon) \text{ δημιουργεί τον κανόνα } [q_1Aq_1] \rightarrow b, \\
\text{η μετάβαση } \delta(q_1, \varepsilon, A) &= (q_1, \varepsilon) \text{ δημιουργεί τον κανόνα } [q_1Aq_1] \rightarrow \varepsilon, \\
\text{η μετάβαση } \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= (q_f, \varepsilon) \text{ δημιουργεί τον κανόνα } [q_1Z_0q_f] \rightarrow \varepsilon,
\end{aligned}$$

η μετάβαση $\delta(q_0, a, Z_0) = (q_0, AZ_0)$ δημιουργεί τους κανόνες:

$$\begin{aligned}
[q_0Z_0q_0] &\rightarrow a[q_0Aq_0][q_0Z_0q_0] \mid a[q_0Aq_1][q_1Z_0q_0] \mid a[q_0Aq_f][q_fZ_0q_0], \\
[q_0Z_0q_1] &\rightarrow a[q_0Aq_0][q_0Z_0q_1] \mid a[q_0Aq_1][q_1Z_0q_1] \mid a[q_0Aq_f][q_fZ_0q_f], \\
[q_0Z_0q_f] &\rightarrow a[q_0Aq_0][q_0Z_0q_f] \mid a[q_0Aq_1][q_1Z_0q_f] \mid a[q_0Aq_f][q_fZ_0q_f],
\end{aligned}$$

κι η μετάβαση $\delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$ δημιουργεί τους κανόνες:

$$\begin{aligned}
[q_0Aq_0] &\rightarrow a[q_0Aq_0][q_0Aq_0] \mid a[q_0Aq_1][q_1Aq_0] \mid a[q_0Aq_f][q_fAq_0], \\
[q_0Aq_1] &\rightarrow a[q_0Aq_0][q_0Aq_1] \mid a[q_0Aq_1][q_1Aq_1] \mid a[q_0Aq_f][q_fAq_1], \\
[q_0Aq_f] &\rightarrow a[q_0Aq_0][q_0Aq_f] \mid a[q_0Aq_1][q_1Aq_f] \mid a[q_0Aq_f][q_fAq_f].
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι χρησιμοποιούμενες μεταβλητές είναι μόνο οι:

$$V = \{[q_0Z_0q_f] \equiv S, [q_0Aq_0], [q_0Aq_1], [q_0Aq_f], [q_0Z_0q_0], [q_0Z_0q_1], [q_1Z_0q_f], [q_1Aq_1]\},$$

ενώ όλες οι άλλες μεταβλητές είναι άχρηστες κι, επομένως, διαγράφονται από τους κανόνες εκείνους που τις περιέχουν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε ένα ΑΣ που αναγνωρίζει τις ΓλΑΣ, οι οποίες παράγονται από τις παρακάτω ΓρΑΣ:

   (i) $S \to aSa|bSb|c$,

   (ii) $S \to aAA, A \to bS|aS|a$,

   (iii) $S \to aSb|aSbb|\varepsilon$,

   (iv) $S \to aABB|aAA$,
   $A \to aBB|\varepsilon$,
   $B \to bBB|A$.

2. Βρείτε μια ΓρΑΣ που παράγει την ΓλΑΣ, η οποία αναγνωρίζεται από τα παρακάτω ΑΣ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$:

   (i) $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_f\}$, $F = \{q_f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, c\}$, $Z_0 = c$,
   $\delta(q_0, a, c) = (q_0, ac)$,
   $\delta(q_0, a, a) = (q_f, \varepsilon)$,
   $\delta(q_0, b, a) = (q_1, \varepsilon)$,
   $\delta(q_1, \varepsilon, c) = (q_2, \varepsilon)$,
   $\delta(q_f, \varepsilon, c) = (q_0, ac)$.

   (ii) $Q = \{q_0, q_f\}$, $F = \{q_f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, c\}$, $Z_0 = c$,
   $\delta(q_0, a, c) = (q_0, ac)$,
   $\delta(q_0, b, a) = (q_0, aa)$,
   $\delta(q_0, a, a) = (q_f, \varepsilon)$.

   (iii) $Q = \{q_0, q_1, q_f\}$, $F = \{q_f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, c\}$, $Z_0 = c$,
   $\delta(q_0, a, c) = (q_0, ac)$,
   $\delta(q_0, a, a) = (q_0, a)$,
   $\delta(q_0, b, a) = (q_1, \varepsilon)$,
   $\delta(q_1, \varepsilon, c) = (q_f, \varepsilon)$.

   (iv) $Q = \{q_0, q_f\}$, $F = \{q_f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, c\}$, $Z_0 = c$,
   $\delta(q_0, a, c) = (q_0, ac)$,
   $\delta(q_0, b, a) = (q_0, aa)$,
   $\delta(q_0, a, a) = (q_f, \varepsilon)$.