3.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΛΩΣΣΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ

3.4.1 ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΗΣ ΑΝΤΛΗΣΗΣ ΓΙΑ ΓΛΑΣ

Θεώρημα (**Λήμμα Άντλησης για ΓλΑΣ**): Έστω L μια ΓλΑΣ. Τότε υπάρχει σταθερά $n \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται μόνο από την L) τέτοια ώστε, κάθε $z \in L$, με $|z| \geqslant n$, να γράφεται ως $z = uvwxy$, όπου τα $u, v, w, x, y \in T^*$ είναι τέτοια ώστε:

- $|vwx| \leqslant n$,
- $|vx| \geqslant 1$ (ή τουλάχιστον ένα από τα v, x να είναι $\neq \varepsilon$),
- $uv^m wx^m y \in L, \forall m \geqslant 0$.

Παράδειγμα 1: Έστω $L = \{a^i b^i c^i : i \geqslant 1\}$. Θα δείξουμε με το ΛΑ ότι η γλώσσα αυτή <u>δεν</u> είναι ΓλΑΣ.

Αν L ήταν ΓλΑΣ και n όπως στο ΛΑ, θεωρούμε

$$z = a^n b^n c^n \in L \text{ με } |z| = 3n > n,$$

οπότε το ΛΑ συνεπάγεται για κατάλληλα u, v, w, x, y (όπως στο ΛΑ):

$$a^n b^n c^n = uvwxy.$$

Έχουμε τις εξής 3 περιπτώσεις:

(I) Το vwx περιέχει και a και b και c.
(II) Το vwx περιέχει μόνο δυο από τα a, b, c.
(III) Το vwx περιέχει μόνο ένα από τα a, b, c.

<u>Η περίπτωση (I)</u>: Τώρα, $vwx = a^i b^j c^k$, για $i, j, k \geqslant 1$. Άρα, $u = a^p$ και $y = c^q$, για $p, q \geqslant 0$. Έτσι, $uvwxy = a^{p+i} b^j c^{k+q} = a^n b^n c^n$, που συνεπάγεται $p + i = j = k + q = n$. Αλλά τότε, $|vwx| = i+j+k = i+k+n \geqslant n+2 > n$ (διότι $i, k \geqslant 1$), που είναι άτοπο, αφού πρέπει $|vwx| \leqslant n$.

<u>Η περίπτωση (II)</u>: Προφανώς, αν το vwx περιέχει δύο από τα a, b, c, αυτά μπορεί να είναι είτε τα a, b είτε τα b, c (γιατί αν ήταν τα a, c, τότε $n_b(uvwxy) = 0$, που είναι άτοπο). Έστω λοιπόν ότι το vwx περιέχει μόνο a, b (παρόμοια στις άλλες περιπτώσεις). Τότε, τα v, x μπορεί να είναι όπως σε μια από τις εξής 3 περιπτώσεις:

(II_1) $v = a^i, x = b^j$,
(II_2) $v = a^i b^j, x = b^k$,
(II_3) $v = a^i, x = a^j b^k$,

για κάποια $i, j, k \geqslant 1$. Όμως οι περιπτώσεις (II_2) και (II_3) δεν μπορούν να συμβούν, γιατί, αφού $uv^m wx^m y \in L (m > 0)$, θα είχαμε b πριν από a. Επομένως, η μόνη δυνατή περίπτωση είναι η (II_1), στην οποίαν, επιπλέον των v, x, πρέπει:

$$u = a^r, y = b^s c^t, \text{ για } r, s, t \geqslant 0,$$

οπότε αναγκαστικά και:

$$w = a^p b^q, \text{ για } p, q \geqslant 0.$$

Έτσι, έχουμε:

$$uvwxy = a^{r+i+p} b^{q+j+s} c^t = a^n b^n c^n \text{ και, άρα, } r+i+p = (q+j+s=)\ t\ (=n). \qquad (*)$$

Αλλά και $uwy = a^{r+p} b^{q+s} c^t \in L$ (ΛΑ για $m = 0$), οπότε έπεται ότι $r + p = (q + s =)\ t$, ενώ η $(*)$ συνεπάγεται ότι $r + p < r + i + p = t$. Άτοπο!

<u>Η περίπτωση (III)</u>: Θα δουλέψουμε για την περίπτωση που $vwx = a^j$, $j \geqslant 1$ (παρόμοια γίνονται κι οι άλλες περιπτώσεις). Υποχρεωτικά, τότε, $u = a^i$ και $y = a^k b^p c^q$, για $i, k, p, q \geqslant 0$, ενώ $w = a^m$, για $0 \leqslant m < j$ (διότι $|vx| \geqslant 1$). Έτσι:

$$uvwxy = a^{i+j+k} b^p c^q = a^n b^n c^n \text{ και, άρα, } i+j+k = p = q(=n). \qquad (**)$$

Αλλά και $uwy = a^{i+m+k} b^p c^q \in L$ (ΛΑ για $m = 0$), οπότε έπεται ότι $i + m + k = p = q$, ενώ από την $(**)$ και την $m < j$ συνεπάγεται ότι $i + m + k < i + j + k = p = q$. Άτοπο!

Παράδειγμα 2: Έστω $L = \{a^i b^i c^i d^i : i, j \geqslant 1\}$. Θα δείξουμε με το ΛΑ ότι η γλώσσα αυτή <u>δεν</u> είναι ΓΛΑΣ.

Αν η L ήταν ΓΛΑΣ και το n όπως στο ΛΑ, θεωρούμε τη λέξη:

$$z = a^n b^n c^n d^n \text{ με } |z| = 4n > n,$$

οπότε το ΛΑ συνεπάγεται, για κατάλληλα u, v, w, x, y (όπως στο ΛΑ):

$$a^n b^n c^n d^n = uvwxy.$$

Έχουμε τις εξής 4 περιπτώσεις:

(I) Το vwx περιέχει και a και b και c και d.
(II) Το vwx περιέχει μόνο 3 από τα a, b, c, d.
(III) Το vwx περιέχει μόνο 2 από τα a, b, c, d.
(IV) Το vwx περιέχει μόνο 1 από τα a, b, c, d.

<u>Η περίπτωση (I)</u>: Τώρα, $vwx = a^i b^j c^k d^l$, για $i, j, k, l \geqslant 1$. Άρα, $u = a^p$ και $y = d^q$, για $p, q \geqslant 0$. Έτσι, $uvwxy = a^{p+i} b^j c^k d^{l+q} = a^n b^n c^n d^n$, που συνεπάγεται $p+i = j = k = l+q = n$. Αλλά τότε, $|vwx| = i + j + k + l = i + l + 2n \geqslant 2n + 2 > n$ (διότι $i, l \geqslant 1$), που είναι άτοπο, αφού πρέπει $|vwx| \leqslant n$.

<u>Η περίπτωση (II)</u>: Υποθέτουμε ότι το vwx περιέχει και a και b και c (παρόμοια και για τις άλλες περιπτώσεις), δηλαδή, $vwx = a^i b^j c^k$, για $i, j, k \geqslant 1$. Άρα, $u = a^p$ και $y = c^q d^r$, για $p, q, r \geqslant 0$. Έτσι, $uvwxy = a^{p+i} b^j c^{k+q} d^r = a^n b^n c^n d^n$, που συνεπάγεται $p + i = j = k + q = r = n$. Αλλά τότε, $|uwx| = i + j + k = i + n + k \geqslant n + 2 > n$ (διότι $i, k \geqslant 1$), που είναι άτοπο, αφού πρέπει

$|vwx| \leqslant n$.

Η περίπτωση (III): Αν το vwx περιέχει μόνο 2 από τα a, b, c, d, αυτά μπορεί να είναι είτε τα a, b είτε τα b, c, είτε τα c, d (γιατί σ'ολες τις άλλες περιπτώσεις κάποια από τα a, b, c, d υποχρεωτικά θα απουσίαζαν στο $uvwxy$, κάτι άτοπο). Υποθέτουμε ότι το vwx περιέχει μόνο a, b (παρόμοια για τις άλλες περιπτώσεις). Τότε διακρίνουμε τις εξής 3 περιπτώσεις για τα v και x:

$$\begin{array}{ll} (III_1) & v = a^i, x = b^j, \\ (III_2) & v = a^i b^j, x = b^k, \\ (III_3) & v = a^i, x = a^j b^k, \end{array}$$

για κάποια $i, j, k \geqslant 1$. Όμως οι περιπτώσεις (III_2) και (III_3) δεν μπορούν να συμβούν, γιατί, αφού $uv^m wx^m y \in L (m > 0)$, θα είχαμε b πριν από a. Επομένως, η μόνη δυνατή περίπτωση είναι η (III_1), στην οποίαν, επιπλέον των v, x, πρέπει:

$$u = a^r, y = b^s c^t d^u, \text{ για } r, s, t, u \geqslant 0,$$

οπότε αναγκαστικά και:

$$w = a^p b^q, \text{ για } p, q \geqslant 0.$$

Έτσι, έχουμε:

$$uvwxy = a^{r+i+p} b^{q+j+s} c^t d^u = a^n b^n c^n d^n \text{ και, άρα, } r + i + p = (q + j + s =)\ t = \ (u = n). \quad (*)$$

Αλλά και $uwy = a^{r+p} b^{q+s} c^t d^u \in L$ (ΛΑ για $m = 0$), οπότε έπεται ότι $r + p = (q + s =)\ t$, ενώ η $(*)$ συνεπάγεται ότι $r + p < r + i + p = t$. Άτοπο!

Η περίπτωση (IV): Θα δουλέψουμε την περίπτωση $vwx = a^j, j \geqslant 1$ (γιατί παρόμοια γίνονται κι οι άλλες περιπτώσεις). Υποχρεωτικά, τότε, $u = a^i$ και $y = a^k b^p c^q d^r$, για $i, k, p, q, r \geqslant 0$, ενώ $w = a^m$, για $0 \leqslant m < j$ (διότι $|vx| \geqslant 1$). Έτσι:

$$uvwxy = a^{i+j+k} b^p c^q d^r = a^n b^n c^n d^n, \text{ και, άρα, } i + j + k = p = q\ (= r = n). \qquad (**)$$

Αλλά, και, $uwy = a^{i+m+k} b^p c^q d^r \in L$ (ΛΑ για $m = 0$), που συνεπάγεται $i + m + k = q$ (και $p = r$). Ενώ, από την $(**)$ και την $m < j$ παίρνουμε $i + m + k < i + j + k = q$. Άτοπο!

3.4.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΛΕΙΣΤΟΤΗΤΑΣ ΓΛΑΣ

Θεώρημα: Οι γλώσσες ανεξάρτητες συμφραζομένων είναι κλειστές σε ένωση, συνένωση και αστέρι Kleene.

Κατασκευή ΓρΑΣ από ένωση, συνένωση και αστέρι Kleene

Έστω $G_i = \{V_i, T_i, R_i, S_i\}, i = 1, 2$, δυο ΓρΑΣ που παράγουν τις γλώσσες L_1, L_2, αντιστοίχως. Υποθέτουμε ότι $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Η $L_1 \cup L_2$ παράγεται από την ΓρΑΣ $G_3 = \{V_3, T_3, R_3, S_3\}$, όπου:

$$\begin{aligned} V_3 &= V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\}, \\ T_3 &= T_1 \cup T_2, \\ R_3 &= R_1 \cup R_2 \cup \{S_3 \to S_1 | S_2\}. \end{aligned}$$

Η $L_1 L_2$ παράγεται από την ΓρΑΣ $G_4 = \{V_4, T_4, R_4, S_4\})$, όπου:

$$\begin{aligned} V_4 &= V_1 \cup V_2 \cup \{S_4\}, \\ T_4 &= T_1 \cup T_2, \\ R_4 &= R_1 \cup R_2 \cup \{S_4 \to S_1 | S_2\}. \end{aligned}$$

Η L_1^* παράγεται από την ΓρΑΣ $G_5 = \{V_5, T_5, R_5, S_5\}$ όπου:

$$\begin{aligned} V_5 &= V_1 \cup \{S_5\}, \\ T_5 &= T_1, \\ R_5 &= R_1 \cup \{S_5 \to S_1 S_5 | \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3: Έστω $L = \{a^i b^j c^k : j = i + k, i, j, k \geqslant 0\}$. Προφανώς, $L = L_1 L_2$, όπου $L_1 = \{a^i b^i : i \geqslant 0\}, L_2 = \{b^k c^k : k \geqslant 0\}$. Οι L_1, L_2 παράγονται από τις ΓρΑΣ (αντιστοίχως):

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{\{S_1\}, \{a, b\}, \{S_1 \to a S_1 b | \varepsilon\}, S_1\right\}, \\ G_2 &= \left\{\{S_2\}, \{b, c\}, \{S_2 \to b S_2 c | \varepsilon\}, S_2\right\}. \end{aligned}$$

Επομένως, η $L = L_1 L_2$ παράγεται από την ΓρΑΣ:

$$\begin{aligned} G_3 &= \{V, T, R, S\}, \text{ όπου } V = \{S, S_1, S_2\}, T = \{a, b, c, d\} \text{ και} \\ R &= \{S \to S_1 S_2,\ S_1 \to a S_1 b | \varepsilon,\ S_2 \to b S_2 c | \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Θεώρημα: Οι ΓλΑΣ <u>δεν</u> είναι κλειστές σε τομές (κι άρα ούτε σε συμπληρώματα).

Παράδειγμα 4: Έχουμε ήδη δείξει (από το ΛΑ) ότι η γλώσσα

$$L = \{a^i b^i c^i : i \geqslant 1\}$$

δεν είναι ΓλΑΣ. Έστω:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^i b^i c^j : i, j \geqslant 1\}, \\ L_2 &= \{a^i b^j c^j : i, j \geqslant 1\}. \end{aligned}$$

Η L_1 είναι ΓλΑΣ σαν συνένωση της ΓλΑΣ $\{a^i b^i : i \geqslant 1\}$ με την κανονική γλώσσα c^+. Παρόμοια κι η L_2 είναι ΓλΑΣ.

Αλλά, $L = L_1 \cap L_2$, διότι αφενός $w \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow w \in L_1$ και $w \in L_2 \Rightarrow w = a^i b^i c^j = a^m b^n c^n \Rightarrow i = m = n = j \Rightarrow w \in L$ κι αφετέρου $w \in L \Rightarrow w = a^i b^i c^i = (a^i b^i) c^i = a^i (b^i c^i) \in L_1 \cap L_2$.

Θεώρημα: Η τομή μιας ΓλΑΣ με μια κανονική γλώσσα είναι ΓλΑΣ.

Παράδειγμα 5: Έστω $L = \{x \in (a + b)^* : n_a(x) = n_b(x) \text{ και } abb \notin x\}$.

Συμβολίζουμε:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in (a+b)^* \colon n_a(x) = n_b(x)\}, \\ L_2 &= \{x \in (a+b)^* \colon abb \notin x\}. \end{aligned}$$

Προφανώς, $L = L_1 \cap L_2$ και L_1 είναι ΓλΑΣ. Επιπλέον, $L_2 = (a+b)^* \smallsetminus (a+b)^*abb(a+b)^*$, που συνεπάγεται ότι η L_2 είναι κανονική γλώσσα. Άρα, κι η $L = L_1 \cap L_2$ είναι ΓλΑΣ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν ΓλΑΣ:

- (i) $\{a^i b^i c^j \colon j \geqslant i\}$,
- (ii) $\{a^i b^j c^k \colon i \leqslant j \leqslant k\}$,
- (iii) $\{a^i \colon i$ πρώτος$\}$,
- (iv) $\big\{x \in \{a,b,c\}^* \colon n_a(x) = n_b(x) = n_c(x)\big\}$,
- (v) $\{a^i b^i c^j \colon i \leqslant j \leqslant 2i\}$,
- (vi) $\{a^i b^j a^i b^j \colon i, j \geqslant 0\}$,
- (vii) $\big\{ww \colon w \in \{a,b\}^*\big\}$,
- $(viii)$ $\{a^i b^j \colon j = i^2\}$.

1. Ποιές από τις παρακάτω γλώσσες ΓλΑΣ; Γιατί;

- (i) $\big\{www \colon w \in \{a,b,c\}^*\big\}$,
- (ii) $\big\{xay \colon x, y \in \{a,b\}^*$ και $|x| = |y|\big\}$,
- (iii) $\big\{x \in \{a,b\}^* \colon n_b(x) = 2n_a(x)\big\}$,
- (iv) $\big\{xyx \colon x, y \in \{a,b\}^*$ και $|x| \geqslant 1\big\}$,
- (v) $(a+b)^* \smallsetminus \{a^i b^i \colon i \geqslant 1\}$,
- (vi) $(a+b)^* \smallsetminus \{(a^i b^i)^i \colon i \geqslant 1\}$,
- (vii) $\{a^i b^j \colon i \neq j$ και $i \neq 2j\}$.