

Κεφάλαιο 1

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

1.1 ΓΡΑΦΟΙ ΚΑΙ ΔΕΝΤΡΑ

Ορισμός: Ένας (απλός) γράφος $G = (V, E)$ αποτελείται από:

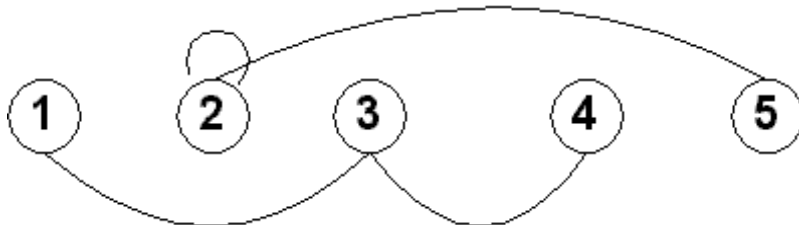
- V , ένα (πεπερασμένο) σύνολο κορυφών (vertices) ή κόμβων (nodes), και
- E , ένα (πεπερασμένο) σύνολο πλευρών (edges) (ή ακμών), που συνδέουν τους κόμβους χωρίς διάταξη.

Παράδειγμα:

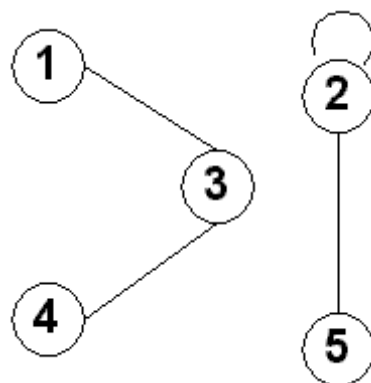
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(n, m) \in V \times V : n + m = 4 \text{ or } 7\} =$$

$$= \{(2, 2), (1, 3) \equiv (3, 1), (2, 5) \equiv (5, 2), (3, 4) \equiv (4, 3)\}$$



ή



Ένα **μονοπάτι** (**path**) είναι μια ακολουθία $V_1, V_2, \dots, V_k \in V$ ($k \geq 1$) κορυφών όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους τέτοιων ώστε $(V_i, V_{i+1}) \in E, \forall i = 1, \dots, k-1$.

Το **μήκος του μονοπατιού** ορίζεται ως το πλήθος των πλευρών που συνδέουν τους κόμβους του.

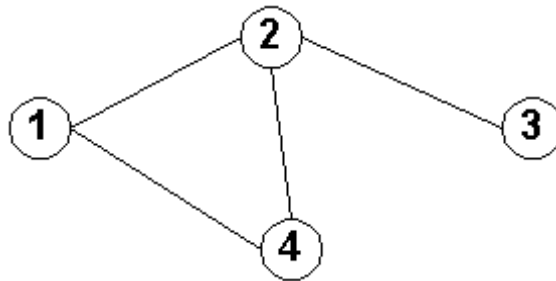
Παράδειγμα: (Συνέχεια)

$\{1, 3, 4\}$ μονοπάτι μήκους 2
 $\{2\} = \{2, 2\}$ μονοπάτι μήκους 1

Ένας **κύκλος** είναι ένα κλειστό μονοπάτι $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ με $V_1 = V_k$ και V_1, V_2, \dots, V_{k-1} διαφορετικά. (Οι μη τετριμμένοι κύκλοι έχουν μήκος ≥ 3 .)

Παράδειγμα:

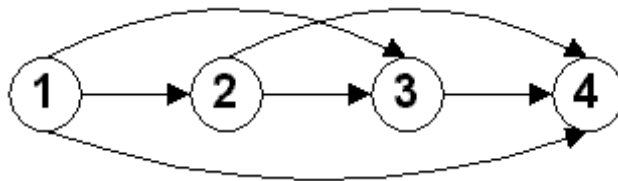
$\{1, 2, 4, 1\}$ κύκλος



Ορισμός: Ένας **κατευθυνόμενος γράφος** (**directed graph**) είναι ένας γράφος στον οποίον η διάταξη των κόμβων στις πλευρές του έχει σημασία. Οι πλευρές τώρα λέγονται **τόξα** (**arcs**) και συμβολίζονται με $v \rightarrow w$ για το τόξο από τον κόμβο v στον w . Τότε λέμε ότι ο κόμβος v προηγείται κι ο κόμβος w ακολουθεί.

Παράδειγμα:

$V = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E = \{(n, m) \in V \times V : n \rightarrow m \Leftrightarrow n < m\}$

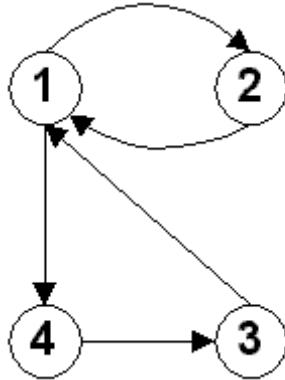


Παρατήρηση: Έστω V τυχαίο (πεπερασμένο) σύνολο και R σχέση στο V , δηλαδή, $R \subset V \times V$. Τότε η σχέση R αναπαρίσταται από έναν κατευθυνόμενο γράφο.

Παράδειγμα:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 3), (3, 3), (3, 1)\}$$



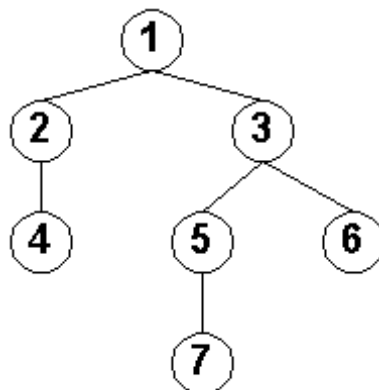
Παρατήρηση: Κάθε συμμετρική σχέση χωρίς διαγώνια ζευγάρια (της μορφής (x, x)) αναπαρίσταται από έναν απλό γράφο.

Ορισμός: Ένα δέντρο (tree) είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος τέτοιος ώστε:

1. Υπάρχει ένας κόμβος, που λέγεται **ρίζα (root)**, ο οποίος δεν ακολουθεί κανέναν άλλο κόμβο αλλά από τον οποίο ξεκινά ένα μονοπάτι προς κάθε άλλο κόμβο.
2. Κάθε κόμβος (εκτός της ρίζας) ακολουθεί μόνο έναν άλλο κόμβο.

Οι κόμβοι του δέντρου διατάσσονται από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά. Επιπλέον, αντί για τόξα βάζουμε πλευρές (χωρίς βέλη) σ' ένα δέντρο.

Παράδειγμα:



Ορολογία δέντρων:

- $(u, v) \in E$ (δηλαδή, $u \rightarrow v$) : u πατέρας, v παιδί
- Μονοπάτι από u στο v : u πρόγονος, v απόγονος
- Κόμβος χωρίς παιδιά: φύλλο
- Κόμβος με παιδιά: εσωτερικός
- Το ύψος του δέντρου είναι το μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού από τη ρίζα προς κάποιο φύλλο
- Το βάθος του κόμβου είναι το μήκος του μονοπατιού από τη ρίζα στον κόμβο

Παράδειγμα: (Συνέχεια)

2, 3, 5 εσωτερικοί

4, 6, 7 φύλλα

ύψος = 3 (μήκος του $\{1, 3, 5, 7\}$)βάθος του 4 = 2 (μήκος του $\{1, 2, 4\}$)