να αποφασίζει εάν ένας αριθμός είναι ή όχι σύνθετος. Περιγράψατε τις απαραίτητες αλλαγές και προσπαθήστε να δώσετε το γράφημα ροής αυτής της μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing . Προσδιορίστε, επίσης, το όριο $m \in N$ που θέτει ο σχετικός ορισμός.

$\diamond$

1.6 Γραμματικές

Έχοντας παρουσιάσει το μοντέλο της μηχανής Turing και των ισοδύναμων παραλλαγών του, προχωράμε να παρουσιάσουμε τις **γραμματικές χωρίς περιορισμούς** ως ένα ακόμη ισοδύναμο μοντέλο. Η ισοδυναμία αυτή είναι ανάλογη με αυτήν που υπάρχει μεταξύ αυτομάτων στοίβας και γραμματικών ελεύθερων συμφραζομένων, με την έννοια ότι οι μεν μηχανές Turing ορίζουν γλώσσες με το να τις "αναγνωρίζουν", (είτε αποφασίζοντας ή αποδεχόμενες αυτές), οι δε γραμματικές ορίζουν γλώσσες "γεννώντας" αυτές.

Οι γραμματικές χωρίς περιορισμούς, ή απλά **γραμματικές** ή ακόμη γνωστές ως **συστήματα επανεγγραφής** ή **γραμματικές φραστικής δομής** είναι μια φαινομενικά απλή, αλλά τελικά, πανίσχυρη επέκταση των γραμματικών ελεύθερων συμφραζομένων, επιτρέποντας το αριστερό μέρος των κανόνων τους να είναι μια συμβολοσειρά τερματικών και μη τερματικών συμβόλων με ένα τουλάχιστον μη τερματικό σύμβολο. Τυπικά έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.11 : Γραμματική, (ισοδύναμα, **γραμματική χωρίς περιορισμούς** ή **σύστημα απανεγγραφής** ή **γραμματική φραστικής δομής**) είναι μια τετράδα $G = (V, \Sigma, R, S)$, όπου

V είναι ένα **αλφάβητο**,

$\Sigma \subseteq V$ είναι το σύνολο των **τερματικών** συμβόλων ενώ το $V - \Sigma$ είναι το σύνολο των **μη τερματικών** συμβόλων,

R είναι το σύνολο των **κανόνων**, ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(V^*(V - \Sigma)V^*) \times V^*$ και

$S \in V - \Sigma$ είναι το **αρχικό** σύμβολο.

Γράφουμε $u \to v$ εάν $(u, v) \in R$. Γράφουμε $u \Rightarrow v$ εάν και μόνο εάν , για κάποια $w_1, w_2 \in V^*$ και κάποιον κανόνα $u' \to v', u = w_1 u' w_2$ και $v = w_1 v' w_2$. $\Rightarrow_G^*$ είναι η ανακλαστική, μεταβατική κλειστότητα του $\Rightarrow_G$. Λέμε ότι μια συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ **γεννιέται** από την G εάν και μόνο εάν $S \Rightarrow_G^* w$. Συμβολίζουμε με $L(G)$ την **γλώσσα που γεννιέται** από την G, δηλαδή το σύνολο όλων των συμβολοσειρών στο Σ^* που γεννιόνται από την G. Μια **παραγωγή** είναι μια ακολουθία της μορφής

$$w_0 \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G w_n.$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για τα μη τερματικά σύμβολα στο $V - \Sigma$ και μικρά για τα τερματικά σύμβολα στο Σ και τις συμβολοσειρές γενικά στο V^*. Επίσης θα συμβολίζουμε πάντα με S το αρχικό σύμβολο μιας γραμματικής.

Υπενθυμίζουμε ότι μια γραμματική ελεύθερη συμφραζομένων είναι μια γραμματική όπου το αριστερό μέρος κάθε κανόνα της είναι μέλος του $V - \Sigma$ και όχι του $V^*(V - \Sigma)V^*$. Αντίθετα, σε μια γραμματική χωρίς περιορισμούς, ένας κανόνας μπορεί να έχει τη γενική μορφή $uAv \to uwv$, η οποία κατά την διάρκεια μιας παραγωγής λέει: " αντικατέστησε το A με το w στα **συμφραζόμενα** του u και του v", (δηλαδή όταν το "περιβάλλον" του A είναι η συμβολοσειρά u αριστερά του και η συμβολοσειρά v στα δεξιά του). Φυσικά, οι κανόνες μιας γραμματικής μπορεί να έχουν μια μορφή ακόμη πιο γενική από αυτήν, αλλά αποδεικνύεται ότι κάθε γλώσσα που μπορεί να γεννηθεί από μια γραμματική μπορεί να γεννηθεί και από μια στην οποία όλοι οι κανόνες είναι του τύπου "αντικατάστασης εξαρτώμενης από τα συμφραζόμενα". Τώρα, εάν για κάθε κανόνα $u \to v$ μιας γραμματικής χωρίς περιορισμούς ισχύει $|u| \leq |v|$, τότε αυτή καλείται **γραμματική ευαίσθητη συμφραζομένων** και η γλώσσα που γεννά **ευαίσθητη συμφραζομένων γλώσσα** . Σχεδόν κάθε γλώσσα που μπορούμε να σκεφθούμε είναι μια γλώσσα ευαίσθητη συμφραζομένων (οι μόνες γνωστές αποδείξεις ότι συγκεκριμένες γλώσσες δεν είναι ευαίσθητες συμφραζομένων, αλλά γλώσσες χωρίς περιορισμούς, βασίζονται στο κλασικό επιχείρημα της "διαγωνοποίησης" που παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα). Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι μια γλώσσα είναι ευαίσθητη συμφραζομένων εάν και μόνο εάν γεννιέται από μια γραμματική που κάθε κανόνας της είναι της μορφής $uAv \to uwv$, όπου το A είναι μη τερματικό και το w δεν είναι η κενή συμβολοσειρά ($w \neq e$)

Με την εισαγωγή των *γραμματικών χωρίς περιορισμούς* και των *γραμματικών ευαίσθητων συμφραζομένων*, σε συνδυασμό με τις *γραμματικές ελεύθερες συμφραζομένων* και τις *κανονικές γραμματικές*, που παρουσιάστηκαν στην υποενότητα "Αυτόματα και Τυπικές Γλώσσες" συμπληρώνεται η γνωστή **Ιεραρχία Chomsky** των γραμματικών. Η ιεραρχία αυτή που εισήγαγε ο Noam Chomsky το 1956 και το 1959, κατατάσσει τις γραμματικές - και τις αντίστοιχες σε αυτές γλώσσες - στους τύπους 0,1,2 και 3 σε αντιστοιχία με τις γραμματικές χωρίς περιορισμούς, τις γραμματικές ευαίσθητες συμφραζομένων, τις γραμματικές ελεύθερες συμφραζομένων και τις κανονικές γραμματικές. Ήδη στην υποενότητα "Αυτόματα και Τυπικές Γλώσσες" έχει δειχθεί η ισοδυναμία μεταξύ κανονικών γλωσσών και πεπερασμένων αυτομάτων με την έννοια ότι μια γλώσσα είναι κανονική εάν και μόνο εάν είναι αποδεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο. Με την ίδια έννοια έχει επίσης δειχθεί και η ισοδυναμία μεταξύ γλωσσών ελεύθερων συμφραζομένων και αυτομάτων στοίβας. Στο Θεώρημα 1.4 αποδεικνύεται η ισοδυναμία μεταξύ γραμματικών χωρίς περιορισμούς και της μηχανής Turing υπό την έννοια ότι μια γλώσσα γεννιέται από μια γραμματική χωρίς περιορισμούς εάν και μόνο εάν είναι αποδεκτή από μια μηχανή Turing (δηλαδή, εάν και μόνο εάν είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη). Επίσης στην απάντηση της άσκησης αυτοαξιολόγησης 1.9 αποδεικνύεται ότι οι γλώσσες ευαίσθητες συμφραζομένων είναι Turing αποφασίσιμες (δηλαδή, είναι αναδρομικές), ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ορισμένες αναδρομικές γλώσσες δεν είναι ευαίσθητες συμφραζομένων. Επίσης αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ότι μια γλώσσα είναι ευαίσθητη συμφραζομένων εάν και μόνο εάν δεν περιέχει την κενή συμβολοσειρά και είναι αποδεκτή από μια μηχανή Turing με **γραμμικά περιορισμένη ταινία**, δηλαδή μια μηχανή Turing που δεν κινεί την κεφαλή δεξιότερα της κενής θέσης, μετά την συμβολοσειρά εισόδου, που είναι αρχικά τοποθετημένη. Η απόδειξη αυτού ξεφεύγει του σκοπού της Θεωρίας Υπολογισμού σε προπτυχιακό επίπεδο. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη βιβλιογραφία που δίνουμε στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Τέλος αναφέρουμε για λόγους πληρότητας, την σχέση του **περιέχεται** μεταξύ των γλωσσών της ιεραρχίας Chomsky. Οι κανονικές γλώσσες είναι γνήσιο υποσύνολο των γλωσσών ελεύθερων συμφραζομένων, οι γλώσσες ελεύθερων συμφραζομένων που δεν περιέχουν την κενή συμβολοσειρά είναι γνήσιο υποσύνολο των γλωσσών ευαίσθητων συμφραζομένων και οι τελευταίες είναι γνήσιο υποσύνολο των γλωσσών χωρίς περιορισμούς (δηλαδή, των αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών). Η σχέση του περιέχεται μεταξύ των Turing αποφασίσιμων και των Turing αποδεκτών έχει ήδη παρουσιαστεί μερικώς στο εδάφιο 1.3, θα ολοκληρωθεί στο εδάφιο 2.3, ενώ ιδιότητες αυτών θα παρουσιαστούν στο εδάφιο 2.7.

Παράδειγμα 1.15 : Ας σχεδιάσουμε τη G που γεννά τη γλώσσα $L(G) = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$. Θυμηθείτε ότι αυτή η γλώσσα δεν μπορεί να γεννηθεί από μια γραμματική ελεύθερη συμφραζομένων. Η γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ έχει

$$
\begin{aligned}
V &= \{S, S', a, b, c, A, B, C, \}, \\
\Sigma &= \{a, b, c\} \text{ και}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R = \{ \quad S &\rightarrow e, \\
S &\rightarrow aBCS', \\
S' &\rightarrow ABCS', \\
S' &\rightarrow e, \\
BA &\rightarrow AB, \\
CA &\rightarrow AC, \\
CB &\rightarrow BC, \\
aA &\rightarrow aa, \\
aB &\rightarrow ab, \\
bB &\rightarrow bb, \\
bC &\rightarrow bc, \\
cC &\rightarrow cc \quad \}.
\end{aligned}
$$

Ο πρώτος κανόνας γεννά την κενή συμβολοσειρά e, ($n = 0$). Οι επόμενοι τρεις κανόνες γεννούν μια συμβολοσειρά της μορφής $aBC(ABC)^{n-1}, n \geq 1$. Στην συνέχεια οι επόμενοι τρεις κανόνες ταξινομούν μεταξύ τους τα A, B και C ώστε να προκύψει η συμβολοσειρά $aA^{n-1}B^nC^n$. Κατόπιν, ο κανόνας $aA \rightarrow aa$ μετατρέπει, από αριστερά στα δεξιά, τα A σε a. Όταν ολοκληρωθεί η μετατροπή των A σε μικρά, εφαρμόζονται οι επόμενοι κανόνες μετατροπής με την σειρά που δίνεται παραπάνω, με αποτέλεσμα να μετατραπούν όλα τα B σε b και μετά όλα τα C σε c. Με την περιγραφή αυτή γίνεται φανερός ο ρόλος του πρώτου a που εισαγάγει ο δεύτερος κανόνας της G. Το αποτέλεσμα είναι η συμβολοσειρά $a^nb^nc^n, n \geq 1$. Η παραπάνω σειρά χρήσης των κανόνων της G γεννά πράγματι όλες τις συμβολοσειρές της μορφής $a^nb^nc^n, n \geq 0$. Η σειρά αυτή δεν είναι φυσικά και η μόνη ικανή. Για παράδειγμα, οι κανόνες ταξινόμησης των A, B και C μπορούν να εφαρμοστούν, (για $n \geq 2$), με οποιαδήποτε μεταξύ τους σειρά, όπως επίσης και πριν ή έχει σχηματιστεί για το επιθυμητό n η συμβολοσειρά $aBC(ABC)^{n-1}$. Επίσης δεν είναι απαραίτητο να έχει ολοκληρωθεί η ταξινόμηση των A, B και C για να αρχίσουν αυτά να μετατρέπονται στα αντίστοιχα τερματικά τους, αναγκαίο όμως είναι πριν αρχίσει η μετατροπή των B να έχει ολοκληρωθεί αυτήν των A και πριν αρχίσει αυτήν των C να έχει γίνει η μετατροπή όλων των B. Σε διαφορετική περίπτωση θα έχει γεννηθεί μια συμβολοσειρά με όχι μόνο τερματικά σύμβολα και χωρίς την δυνατότητα εφαρμογής άλλου κανόνα. Με βάση την παραπάνω ανάλυση δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι μόνο έτσι μπορούμε να γεννήσουμε τερματικές συμβολοσειρές οι οποίες και θα είναι μόνον της μορφής $a^nb^nc^n, n \geq 0$. $\diamond$

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.8 : Η ακόλουθη γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ γεννά όλες τις συμβολοσειρές της μορφής $\{a^{2^n}, n \geq 0\}$, όπου

$$
\begin{aligned}
V &= \{[,], A, D, S, a\}, \\
\Sigma &= \{a\} \text{ και}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rclcl}
R & = & \{ & S & \rightarrow & [A], \\
& & & [& \rightarrow & [D, \\
& & & D] & \rightarrow &], \\
& & & DA & \rightarrow & AAD, \\
& & & [& \rightarrow & e, \\
& & &] & \rightarrow & e, \\
& & & A & \rightarrow & a \quad \}.
\end{array}
$$

Περιγράψτε με λεπτομέρεια το πως αυτό γίνεται και ποιοι είναι οι περιορισμοί στην σειρά εφαρμογής των κανόνων της G. ◇

Τα επόμενα δύο θεωρήματα αποδεικνύουν την ισοδυναμία μεταξύ μηχανών Turing και γραμματικών.

Θεώρημα 1.4 : Μια γλώσσα γεννιέται από μια γραμματική εάν και μόνο εάν είναι Turing αποδεκτή.

Απόδειξη: (α) Έστω η γλώσσα $L(G)$ που γεννά η γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$. Θα περιγράψουμε μια μηχανή Turing M που αποδέχεται την $L(G)$. Στην πραγματικότητα θα περιγράψουμε μια 2-ταινιών μη ντετερμινιστική μηχανή Turing.

Η πρώτη ταινία της M περιέχει την συμβολοσειρά εισόδου w την οποία η M πρέπει να αποδεχθεί εάν και μόνο εάν $w \in L(G)$, και δεν αλλάζει ποτέ. Η δεύτερη ταινία χρησιμοποιείται για την κατασκευή των διαδοχικών συμβολοσειρών, ξεκινώντας από το αρχικό σύμβολο S της G, μιας παραγωγής που θα γεννήσει την συμβολοσειρά w εάν και μόνο εάν $w \in L(G)$, (διαφορετικά η M θα πέσει σε βρόχο). Σε κάθε βήμα της παραγωγής η M επιλέγει μη ντετερμινιστικά μεταξύ $|R|+1$ δυνατών επόμενων μεταπτώσεων. Οι πρώτες $|R|$ από αυτές αντιστοιχούν στους $|R|$ κανόνες της γραμματικής και η $(|R|+1)$-οστή στο να εξετάσει η M εάν η συμβολοσειρά που έχει γεννήσει στην δεύτερη ταινία είναι ίση με την δοθείσα στην πρώτη ταινία. Έστω $u \rightarrow v$ ο κανόνας που επιλέχθηκε σε μια από τις πρώτες $|R|$ επιλογές. Τότε η M μη ντετερμινιστικά θα βρει στην συμβολοσειρά της δεύτερης ταινίας ένα της τμήμα ίσο με u, θα το αντικαταστήσει με v,(θα χρειαστεί να μετακινήσει κατάλληλα το υπόλοιπο μέρος της συμβολοσειράς στην περίπτωση που $|u| \neq |v|$), και θα προχωρήσει στο επόμενο βήμα της παραγωγής. Εάν δεν βρεθεί τμήμα συμβολοσειράς ίσο με u τότε η M πέφτει σε βρόχο μη αποδεχόμενη την συμβολοσειρά εισόδου (γιατί;). Στην $(|R| + 1)$-οστή επιλογή εάν η συμβολοσειρά που γεννήθηκε στην δεύτερη ταινία είναι ίση με την συμβολοσειρά εισόδου w, τότε η M τερματίζει, δηλαδή αποδέχεται την w, διαφορετικά πέφτει πάλι σε βρόχο (γιατί;). Η απάντηση στα δυο "γιατί" είναι ότι η M ως μη ντετερμινιστική μηχανή Turing "μαντεύει" πάντα την "σωστή" επιλογή στο δένδρο των δυνατών κινήσεων, που έχει τρία δυνατά αποτελέσματα: ή συνέχιση της παραγωγής (περίπτωση εφαρμογής κάποιου κανόνα), ή αποδοχή (περίπτωση ίσων συμβολοσειρών στις δυο ταινίες), ή μη αποδοχή (εξαιτίας είτε μη δυνατότητας εφαρμογής του κανόνα που επιλέχθηκε ή διότι οι συμβολοσειρές είναι διαφορετικές). Είναι προφανές ότι η M θα τερματίσει εάν και μόνο εάν $w \in L(G)$.

(β)αντίστροφα, έστω $L \subseteq \Sigma - \{\#\}$ είναι η γλώσσα που αποδέχεται η μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$ με σχηματισμό αποδοχής, χωρίς βλάβη της γενικότητας, της μορφής $(h, \underline{\#})$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει γραμματική $G = (V, \Sigma - \{\#\}, R, S), V = \Sigma \cup K \cup \{S,]\}$ τέτοια ώστε $G(L) = L$. Το], με $] \notin K, \Sigma$, συμβολίζει μια κενή στα δεξιά της κεφαλής ταινία. Η βασική ιδέα είναι να κατασκευάσουμε μια γραμματική που ξεκινώντας από το αρχικό της σύμβολο S, κάνει, με τους κανόνες της, μια "οπίσθια" προσομοίωση της λειτουργίας της M, από τον τελικό σχηματισμό $(h, \underline{\#})$ αποδοχής μιας συμβολοσειράς $w \in L$ στον αρχικό σχηματισμό $(s, \#w\underline{\#})$ της M. Ένας σχηματισμός $(q, u\underline{a}v)$ της M θα προσομοιώνεται με την συμβολοσειρά $uaqv]$, όπου η κατάσταση q είναι αμέσως μετά το σύμβολο που είναι η κεφαλή της μηχανής. Οι κανόνες της G προκύπτουν από την τιμή της συνάρτησης $\delta(q, a), q \in K, a \in \Sigma$ της M ως εξής:

1. εάν $\delta(q, a) = (p, b), p \in K, b \in \Sigma$, τότε η G έχει έναν κανόνα $bp \rightarrow aq$.
2. εάν $\delta(q, a) = (p, R), p \in K$, τότε η G έχει
    - κανόνες $abp \rightarrow aqb\ \forall b \in \Sigma$ και
    - τον κανόνα $a\#p] \rightarrow aq]$ (αντιστρέφει την επέκταση της ταινίας δεξιά κατά ένα κενό #).
3. εάν $\delta(q, a) = (p, L), p \in K, a \neq \#$ τότε η G έχει έναν κανόνα $pa \rightarrow aq$.
4. εάν $\delta(q, \#) = (p, L), p \in K$, τότε η G έχει
    - κανόνες $p\#b \rightarrow \#qb\ \forall b \in \Sigma$ και
    - τον κανόνα $p] \rightarrow \#q]$ (αντιστρέφει την απορρόφηση # από την κενή στα δεξιά της κεφαλής ταινία]).

Επιπλέον η G έχει και τους ακόλουθους κανόνες που ξεκινούν και τελειώνουν την προσομοίωση:

- $S \rightarrow \#h]$, για να προσομοιώσει τον σχηματισμό αποδοχής ενός $w \in L$.
- $\# \rightarrow e$, για να σβήσει το # αριστερά της συμβολοσειράς εισόδου.
- $\#s] \rightarrow e$, για να σβήσει τα σύμβολα $\#s]$, ώστε να μείνει μόνο η συμβολοσειρά που αποδέχθηκε η M και που γεννά η G.

Η παραπάνω κατασκευή της G από την M είναι τέτοια που εύκολα κανείς αποδεικνύει ότι $w \in L(G)$ εάν και μόνο εάν

$$S \Rightarrow_G \#h] \Rightarrow_G^* \#w\#s] \Rightarrow_G w\#s] \Rightarrow_G w$$

και συνεπώς η M αποδέχεται την συμβολοσειρά $w \in \Sigma - \{\#\}$ εάν και μόνο εάν $w \in L(G)$. ∎

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.9 : Να δείξετε ότι κάθε ευαίσθητη συμφραζομένων γλώσσα είναι Turing αποφασίσιμη. $\diamond$

Σημειώστε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Επίσης σημειώστε ότι μια γλώσσα είναι ευαίσθητη συμφραζομένων εάν και μόνο εάν γεννιέται από μια γραμματική της οποίας κάθε κανόνας είναι της μορφής $uAv \to uwv$, όπου A είναι μη τερματικό σύμβολο και $w \neq e$.

Πριν παρουσιάσουμε το επόμενο θεώρημα θα ορίσουμε την έννοια "υπολογίζω" με την βοήθεια μιας γραμματικής.

Ορισμός 1.12 : Έστω η γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$, με $\# \in V$ και έστω η συνάρτηση $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$. Λέμε ότι η γραμματική G **υπολογίζει** την f εάν και μόνο εάν για κάθε $w, u \in \Sigma^*$ ισχύει:

$$\#w\#S \Rightarrow_G^* u \text{ εάν και μόνο εάν } u = f(w).$$

(δηλαδή, η G ξεκινώντας με την συμβολοσειρά $\#w\#S$ γεννά την τιμή της $f(w) = u$).

Μια συνάρτηση $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ καλείται **γραμματικά υπολογίσιμη** εάν και μόνο εάν υπάρχει γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ που την υπολογίζει.

Θεώρημα 1.5 : Μια συνάρτηση f είναι Turing υπολογίσιμη εάν και μόνο εάν είναι γραμματικά υπολογίσιμη.

Απόδειξη: (α) Έστω ότι η $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ είναι γραμματικά υπολογίσιμη από την γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$. Τότε η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing $M = (K, \Sigma \cup \{\#\}, \Delta, s, h)$, με αρχική είσοδο $\#w\#$, θα υπολογίσει την τιμή της $f(w)$ ως εξής: αρχικά η M μετασχηματίζει την είσοδο της από $\#w\#$ σε $\#w\#S$. Στην συνέχεια "αναπλάθει" μη ντετερμινιστικά την ακολουθία παραγωγής της G που γραμματικά υπολογίζει την f. Σε κάθε βήμα του υπολογισμού η M επιλέγει μη ντετερμινιστικά μεταξύ $|R|$ δυνατών μεταπτώσεων, μια για κάθε κανόνα της G.

Έστω $r \to v$ ο κανόνας που επιλέχθηκε σε μια από τις $|R|$ επιλογές. Τότε η M μη ντετερμινιστικά θα βρει στην συμβολοσειρά της ταινίας ένα της τμήμα ίσο με r, θα το αντικαταστήσει με v, (θα χρειαστεί να μετακινήσει κατάλληλα το υπόλοιπο μέρος της συμβολοσειράς στην περίπτωση που $|r| \neq |v|$), και θα προχωρήσει στο επόμενο βήμα υπολογισμού. Εάν δεν βρεθεί τμήμα συμβολοσειράς ίσο με r τότε η M τερματίζει, έχοντας έτσι υπολογίσει την τιμή της f (γιατί;). Διότι, εφόσον η M μη ντετερμινιστικά μαντεύει πάντα την σωστή επιλογή κανόνα, θα φθάσει, όπως και η G, πάντα σε μια και μοναδική συμβολοσειρά u με μόνο τερματικά σύμβολα της G, (και συνεπώς τότε δεν θα είναι εφαρμόσιμος κανένας πλέον κανόνας!), που υποχρεωτικά είναι η μοναδική τιμή της συνάρτησης f στο σημείο w.

(β) αντίστροφα, έστω ότι f είναι Turing υπολογίσιμη από την $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$, με $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*, \Sigma_0 = \Sigma - \{\#\}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει γραμματική $G = (V, \Sigma_0, R, s)$ με $V = \{\Sigma \cup K \cup \{s,]\}$ τέτοια ώστε $\#w\#s \Rightarrow_G^* u$ εάν και μόνο εάν $u = f(w)$. Με $]$ συμβολίζουμε μια κενή στα δεξιά της κεφαλής ταινία. Η βασική ιδέα είναι παραπλήσια με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο θεώρημα, δηλαδή να κατασκευάσουμε την γραμματική G έτσι ώστε, ξεκινώντας από το αρχικό της σύμβολο $S = s$, κάνει, με τους κανόνες της, μια "εμπρόσθια", (και όχι "οπίσθια"), προσομοίωση της λειτουργίας της M, από τον αρχικό σχηματισμό $(s, \#w\underline{\#})$ στον τελικό σχηματισμό $(h, \#u\underline{\#})$ της M. Όπως και πριν, ένας σχηματισμός $(q, u\underline{a}v)$, της M παριστάνεται με την συμβολοσειρά $uaqv]$, όπου η κατάσταση q είναι αμέσως μετά το σύμβολο που είναι η κεφαλή της μηχανής. Οι κανόνες της G προκύπτουν από την τιμή της συνάρτησης $\delta(q, a), q \in K, a \in \Sigma$ της M ως εξής (παρατηρήστε ότι οι κανόνες είναι οι ίδιοι με αυτούς του προηγούμενου θεωρήματος, αλλά με αντίθετη κατεύθυνση):

1. εάν $\delta(q, a) = (p, b), p \in K, b \in \Sigma$, τότε η G έχει έναν κανόνα $aq \to bp$.
2. εάν $\delta(q, a) = (p, R), p \in K$, τότε η G έχει
    - κανόνες $aqb \to abp \; \forall b \in \Sigma$ και
    - τον κανόνα $aq] \to a\#p]$ (επέκταση της ταινίας δεξιά κατά ένα κενό $\#$).
3. εάν $\delta(q, a) = (p, L), p \in K, a \neq \#$ τότε η G έχει έναν κανόνα $aq \to pa$.
4. εάν $\delta(q, \#) = (p, L), p \in K$, τότε η G έχει
    - κανόνες $\#qb \to p\#b \; \forall b \in \Sigma$ και
    - τον κανόνα $\#q] \to p]$ (απορρόφηση $\#$ από την κενή δεξιά ταινία].

Επιπλέον η G έχει και τους ακόλουθους κανόνες που ξεκινούν και τελειώνουν την προσομοίωση:

- $s \to s]$, για να προσομοιώσει τον αρχικό σχηματισμό της M.
- $\# \to e$, για να σβήσει τα σύμβολα αριστερά της συμβολοσειράς εξόδου.
- $\#h] \to e$, για να σβήσει τα σύμβολα $\#h]$, ώστε να μείνει μόνο η τιμή u που υπολογίζει η M και που υπολόγισε και η G.

Η παραπάνω κατασκευή της G από την M είναι τέτοια που εύκολα κανείς αποδεικνύει ότι $f(w) = u$ εάν και μόνο εάν

$$\#w\#s \Rightarrow_G \#w\#s] \Rightarrow_G^* \#u\#h] \Rightarrow_G u\#h] \Rightarrow_G u$$

και συνεπώς η M υπολογίζει την συνάρτηση f εάν και μόνο εάν η f είναι γραμματικά υπολογίσιμη από την G. ■