1.5 Μη ντετερμινιστικές μηχανές Turing

Μια ακόμη περίπτωση επέκτασης της κλασικής μηχανής Turing που θα εξετάσουμε είναι αυτήν της εισαγωγής **μη ντετερμινισμού**, δηλαδή της περίπτωσης να έχει η μηχανή Turing την δυνατότητα από έναν σχηματισμό να μεταβούν μη ντετερμινιστικά σε παραπάνω από έναν σχηματισμούς. Με δεδομένο ότι τα μη ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας είναι ισχυρότερα των αντίστοιχων ντετερμινιστικών, γεννιέται το ερώτημα εάν συμβαίνει το ίδιο και με τις μηχανές Turing. Αποδεικνύεται ακόμη μια φορά ότι αυτό δεν συμβαίνει. Παρόλο αυτό, θα παρουσιάσουμε μη ντετερμινιστικές μηχανές Turing διότι πέραν του καθαρά θεωρητικού ενδιαφέροντος, προσφέρονται για να συνθέσουμε ευκολότερα επιθυμητές μηχανές Turing. Πριν προχωρήσουμε στο θεωρητικό μέρος θα δώσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα σχετικό με την πρακτικότητά τους.

Παράδειγμα 1.14 : Έστω ότι θέλουμε να συνθέσουμε μια μηχανή Turing που να αναγνωρίζει σύνθετους αριθμούς. Ένας **σύνθετος** αριθμός είναι το γινόμενο δυο φυσικών αριθμών, που ο καθένας τους είναι μεγαλύτερος του ένα. Για παράδειγμα οι αριθμοί 4, 9, 12, 15 είναι σύνθετοι, ενώ οι πρώτοι αριθμοί δεν είναι.

Έστω η γλώσσα L όλων των σύνθετων αριθμών, δηλαδή, $L = \{I^n, n$ είναι ένας σύνθετος αριθμός$\}$. Για να σχεδιάσουμε μια ντετερμινιστική μηχανή Turing που να αποδέχεται την L, θα έπρεπε να βρούμε τους παράγοντες, εάν υπάρχουν, ενός αριθμού, μια μάλλον πολύπλοκη εργασία. Αντίθετα ο μη-ντετερμινισμός μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε εύκολα μια μηχανή που να αναγνωρίζει την L, με το να μαντεύει τους παράγοντες, αν υπάρχουν τέτοιοι. Αυτή η μηχανή λειτουργεί ως εξής, όταν δίνεται ως είσοδος ο αριθμός n στο μοναδιαίο σύστημα με την συμβολοσειρά $\#I^n\underline{\#}$, τότε

1. Μη-ντετερμινιστικά διάλεξε δυο αριθμούς $p, q > 1$ και μετασχημάτισε την είσοδο σε $\#I^n\#I^p\#I^q\underline{\#}$.
2. Χρησιμοποίησε μια μηχανή Turing πολλαπλασιασμού για να μετασχηματίσεις το αποτέλεσμα του βήματος 1 σε $\#I^n\#I^{p\cdot q}\underline{\#}$.
3. Έλεγξε να δεις εάν $I^n = I^{p\cdot q}$. Αυτό είναι εύκολο, αφού χρειάζεται να συγκριθούν μόνο τα μήκη αυτών των συμβολοσειρών. Τερμάτισε εάν τα μήκη είναι ίσα, αλλιώς συνέχισε έπ' άπειρον τον υπολογισμό πέφτοντας σε βρόχο.

Συγκεκριμένα, έστω P μια μηχανή πολλαπλασιασμού και έστω E μια μηχανή που εκτελεί το βήμα 3, δηλαδή για κάθε $w, u \in \{I\}^*$, η E τερματίζει με την είσοδο $\#w\#u\underline{\#}$ εάν και μόνο εάν $w = u$. έστω, για το βήμα 1, η μη-ντετερμινιστική μηχανή G του Σχήματος 1.16, η οποία γράφει I^m στην ταινία για κάποιο $m \geq 2$. Η G θα δουλέψει δυο φορές, μια για το p και μια για το q. Τότε η γλώσσα L είναι Turing αποδεκτή από τη μηχανή $GGPE$. $\diamond$

$$\begin{tikzcd} > RIR \arrow[r] & IR \arrow[loop above, "\#"] \arrow[r, "\#"] & \# \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.16: μη ντετερμινιστική μηχανή Turing εγγραφής ενός αριθμού $p \geq 2$

Θα πρέπει να τονίσουμε για αποφυγή παρανοήσεων ότι η σχεδίαση μιας μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing αποτελεί περισσότερο απόδειξη ύπαρξης λύσης παρά πρακτική λύση ενός προβλήματος. Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να υλοποιήσουμε την μη ντετερμινιστική μηχανή Turing με μια ισοδύναμη της ντετερμινιστική .

Δραστηριότητα 1.2 : Συνθέστε μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing που να αποδέχεται την γλώσσα $L = \{ww^R uu^R, w, u \in \{a, b\}^*\}$. Δώστε το σχετικό γράφημα ροής και επισημάνετε τους κόμβους της μη ντετερμινιστικής συμπεριφοράς. Ένας τρόπος λύσης του προβλήματος είναι μια μηχανή Turing που αρχικά διαχωρίζει την δοθείσα συμβολοσειρά εισόδου μη ντετερμινιστικά σε δύο τμήματα και στη συνέχεια ελέγχει εάν το καθένα από αυτά είναι της μορφής vv^R (προσέχτε ότι και $e \in L$). ◇

Τυπικά, μια **μη ντετερμινιστική μηχανή Turing** είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \Delta, s, h)$ όπου K, Σ, s και h είναι όπως και στην κλασική μηχανή Turing και Δ είναι μια σχέση, (όχι μια συνάρτηση δ),δηλαδή ένα υποσύνολο του $(K \times \Sigma) \times (K \times (\Sigma \cup \{L, R\})$. Ένας σχηματισμός και οι σχέσεις $\vdash_M$ και $\vdash_M^*$ ορίζονται με τον ανάλογο τρόπο, με την διαφορά ότι η $\vdash_M$ δε απαιτείται να είναι μονότιμη: ένας σχηματισμός μπορεί να δώσει πολλούς άλλους σε ένα βήμα. Η δυνατότητα αυτή μας υποχρεώνει να ορίσουμε πιο προσεκτικά τι σημαίνει "αποδέχομαι", "αποφασίζω" και "υπολογίζω" με μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing. Τυπικά έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 1.8 : Έστω η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \Delta, s, h)$ και έστω η γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\#\}$. Λέμε ότι η M **αποδέχεται**, ή ισοδύναμα, **μισο-αποφασίζει** την γλώσσα L εάν για οποιαδήποτε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ ισχύει $w \in L$ εάν και μόνο εάν η M τερματίζει με συμβολοσειρά εισόδου w, δηλαδή, όταν από τον αρχικό σχηματισμό $(s, \#w\underline{\#})$ μπορεί να φθάσει σε ένα σχηματισμό τερματισμού της μορφής $(h, u\underline{a}v)$ με $a \in \Sigma$ και $u, v \in \Sigma^*$.

Παρατηρείστε ότι μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται μια συμβολοσειρά w αρκεί να υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία βημάτων (δηλ., ένας υπολογισμός), που καταλήγει σε τερματισμό, ενώ μπορούν να υπάρχουν πολλές άλλες ακολουθίες που δεν τερματίζουν. Αυτή είναι και η "μικρή" διαφορά του όρου "αποδέχομαι" μεταξύ ντετερμινιστικής και μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing . Αντίθετα οι όροι "αποφασίζω" και "υπολογίζω" έχουν πιο ουσιαστική διαφορά. Δίνουμε, αρχικά τους τυπικούς ορισμούς και τους σχολιάζουμε στην συνέχεια.

Ορισμός 1.9 : Έστω η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \Delta, s, h)$ και έστω τα ειδικά σύμβολα Y και N ανήκουν στο Σ (αντιστοιχούν στις έννοιες "ναι" και "όχι"). Έστω η γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\#, Y, N\}$. Λέμε ότι η M **αποφασίζει** την γλώσσα L εάν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

(α) $\exists m \in N$, που εξαρτάται από την M και το w τέτοιο ώστε

$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^n (h, \#a\underline{\#}), a \in \{Y, N\}\ \forall n \geq m$$

(β) $w \in L$ εάν και μόνο εάν $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#Y\underline{\#})$

Ορισμός 1.10 : έστω f μια συνάρτηση από το Σ_0^* στο Σ_0^* με $\Sigma_0 \subset \Sigma - \{\#\}$. Λέμε ότι μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \Delta, s, h)$ **υπολογίζει** την f εάν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

(α) $\exists m \in N$, που εξαρτάται από την M και το w τέτοιο ώστε

$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^n (h, u\underline{a}u) \forall n \geq m$$

(β) $f(w) = u$ εάν και μόνο εάν $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#u\underline{\#})$.

Και στους δυο παραπάνω ορισμούς απαιτούμε η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing πάντα να τερματίζει (μάλιστα στην περίπτωση απόφασης η μηχανή Turing τερματίζει δίνοντας απάντηση είτε "ναι" ή "όχι"). Αυτό μοντελοποιείται με την συνθήκη (α) που ουσιαστικά λέει ότι δεν μπορεί να υπάρχει υπολογισμός με πάνω από m βήματα. Με την απαίτηση λοιπόν, **πάντοτε** να τερματίζει, η μηχανή Turing "αποφασίζει" ότι μια συμβολοσειρά ανήκει σε μια γλώσσα εάν και μόνο εάν τουλάχιστον ένας της τερματισμός δίνει απάντηση "ναι", (ανεξάρτητα εάν όλοι οι άλλοι λένε "όχι"!). Εάν όλοι οι τερματισμοί της δίνουν απάντηση "όχι" τότε μόνο η μηχανή Turing "αποφασίζει" ότι η συμβολοσειρά δεν ανήκει στην γλώσσα . Αυτός ο ορισμός απόφασης είναι ασύμμετρος σε ό,τι αφορά το "ναι" και το "όχι" με την έννοια ότι εάν έχουμε μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing M που αποφασίζει μια γλώσσα L δεν αρκεί να της αντιστρέψουμε τους ρόλους των Y και N για να μας αποφασίζει την συμπληρωματική γλώσσα $\overline{L}$. Αυτό θα το πετύχουμε αφού πρώτα μετατρέψουμε την M στην ισοδύναμή της ντετερμινιστική .

Στην περίπτωση "υπολογισμού" μιας συνάρτησης από μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing, πάλι με την απαίτηση πάντα να τερματίζει, λέμε ότι η μηχανή Turing "υπολογίζει" την τιμή της συνάρτησης για κάποια συμβολοσειρά w, εάν και μόνο εάν όλοι οι δυνατοί υπολογισμοί δίνουν την ίδια τιμή (διαφορετικά, δεν θα μπορούσαμε να πούμε ποια απ' όλες τις τιμές είναι η σωστή!).

Σχηματικά θα μπορούσαμε να φανταστούμε ότι το σύνολο των δυνατών βημάτων μιας μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing σχηματίζει ένα δένδρο με ρίζα τον αρχικό σχηματισμό, κόμβους επόμενους σχηματισμούς και κλαδιά να φυτρώνουν από κάθε κόμβο, τόσα όσες είναι οι εναλλακτικές μεταπτώσεις. Ένα κλαδί καταλήγει είτε σε φύλλο ή σε κόμβο. Τα φύλλα αντιπροσωπεύουν τερματικούς σχηματισμούς, ενώ τα κλαδιά μπορούν να συνεχίζουν να φυτρώνουν έπ' άπειρον. Από κάθε κόμβο ξεφυτρώνουν το πολύ $r = |K| \times (|\Sigma| + 2)$ κλαδιά, δεδομένου ότι αυτός είναι ο μέγιστος αριθμός δυνατών επόμενων ζευγών (p, b) με p την επόμενη κατάσταση της μηχανής Turing, $b \in \Sigma \cup \{L, R\}$ όταν q η παρούσα κατάσταση, a το σύμβολο που διαβάστηκε από την θέση της κεφαλής και $(q, a, p, b) \in \Delta$. Η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing έχει την "μαντική" ικανότητα να βρίσκει το σωστό μονοπάτι που την οδηγεί στο σωστό φύλλο, εφ' όσον τέτοιο φύλλο υπάρχει στο δένδρο. Αντίθετα, η ισοδύναμή της ντετερμινιστική πρέπει να εφαρμόσει έναν συστηματικό τρόπο αναζήτησης στο δένδρο, και αυτός είναι μια κατά-πλάτος παρά κατά-βάθος αναζήτηση, δεδομένου ότι μια κατά-βάθος αναζήτηση μπορεί να οδηγήσει σε μονοπάτι που δεν τελειώνει ποτέ, πράγμα που δεν θα επιτρέψει επιστροφή για να διερευνηθούν άλλα μονοπάτια που οδηγούν σε φύλλα. Αντίθετα μια κατά πλάτος αναζήτηση επιτρέπει να διερευνηθούν πρώτα όλα τα μονοπάτια μήκους ένα, μετά μήκους δύο, τρία κ.ο.κ. Η κατά-βάθος αναζήτηση συστηματοποιείται με το να αναθέσουμε σε κάθε κόμβο ή φύλλο μια συμβολοσειρά από το αλφάβητο $\{1, 2, \ldots, r\}$. Το μήκος της συμβολοσειράς φανερώνει το βάθος στο δένδρο που είναι ο κόμβος ή ισοδύναμα το μήκος του μονοπατιού από την ρίζα του δένδρου. Για παράδειγμα η συμβολοσειρά $w = 3 \cdot 4 \cdot 1$ αντιστοιχεί στον κόμβο που φθάνουμε εάν ακολουθήσουμε το τρίτο κλαδί από την ρίζα, μετά το τέταρτο κλαδί και έπειτα το πρώτο κλαδί. Η συμβολοσειρά δίνει συνεπώς το μονοπάτι ενός υπολογισμού και είναι μέλος του $\{1, 2, \ldots, r\}^*$.

Με βάση τα παραπάνω, θα περιγράψουμε μια 3-ταινιών ντετερμινιστική μηχανή Turing M_2 ισοδύναμη μιας δοθείσας μη ντετερμινιστικής M_1 η οποία προσομοιώνει τους υπολογισμούς της M_1 με μια κατά-πλάτος αναζήτηση. Γνωρίζουμε ήδη ότι μια 3-ταινιών μηχανή Turing μπορεί στην συνέχεια να μετατραπεί στην κλασική μηχανή Turing. Οι τρεις ταινίες της M_2 χρησιμοποιούνται ως εξής:

(α) Η πρώτη ταινία περιέχει την συμβολοσειρά εισόδου και δεν τροποποιείται ποτέ ώστε ο προσομοιούμενος υπολογισμός της M_1 από την M_2 για το επόμενο μονοπάτι του δένδρου να μπορεί να ξεκινήσει με την ίδια συμβολοσειρά εισόδου.

(β) Η δεύτερη και η τρίτη ταινία χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση ενός υπολογισμού για ένα συγκεκριμένο μονοπάτι το οποίο προσδιορίζει η συμβολοσειρά μονοπατιού που είναι στην τρίτη ταινία. Στην αρχή ενός υπολογισμού η συμβολοσειρά εισόδου αντιγράφεται από την πρώτη ταινία στην δεύτερη. Στην αρχή της όλης προσομοίωσης η τρίτη ταινία περιέχει την κενή συμβολοσειρά e (με συνέπεια να μην γίνει κανένας υπολογισμός την πρώτη φορά)

$$\begin{tikzcd} > C^{1,2} \arrow[r] & G^3 \arrow[r] & M^{2,3}R^3 \arrow[loop above, "\overline{\#}^{(3)}"] \arrow[ll, bend left, "\#^{(3)}"] \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.17: Προσομοίωση μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing από μια 3-ταινιών ντετερμινιστική μηχανή Turing

(γ) Μεταξύ δυο υπολογισμών η M_2 γεννά το επόμενο κατά λεξικογραφική σειρά μονοπάτι στο $\{1, 2, \ldots, r\}^*$. Δηλαδή, ξεκινώντας από το e θα γεννηθούν τα μονοπάτια $1, 2, \ldots, r, 11, 12, \ldots, rr, 111, 112, \ldots$ (ουσιαστικά πρόκειται για μια απαρίθμηση κατά ένα σε βάση r).

Στο Σχήμα 1.17 δίνουμε το γράφημα ροής της M_2 με την βοήθεια άλλων σύνθετων μηχανών. Η $C^{1,2}$ αντιγράφει την συμβολοσειρά εισόδου από την πρώτη ταινία στη δεύτερη. Η G^3 γεννά την επόμενη λεξικογραφικά συμβολοσειρά μονοπατιού. Η $M^{2,3}$ προσομοιώνει ένα βήμα υπολογισμού της M_1 με βάση ένα σύμβολο του μονοπατιού στην τρίτη ταινία. Η R^3 κινεί την κεφαλή δεξιά στην τρίτη ταινία για να δει ποιο θα είναι το επόμενο κλαδί του μονοπατιού και όσο το μονοπάτι δεν έχει εξαντληθεί εκτελείται το επόμενο βήμα υπολογισμού από την $M^{2,3}$, διαφορετικά πηγαίνουμε στην $C^{1,2}$ για τον υπολογισμό του επόμενου λεξικογραφικά μονοπατιού.

Από την παραπάνω περιγραφή γίνεται εύκολα φανερό ότι η M_2 τερματίζει εάν και μόνο εάν η M_1 τερματίζει για κάποιο μονοπάτι. Στην πραγματικότητα η M_2 έχει την ευκαιρία να τερματίσει στο τελευταίο σύμβολο (κλαδί) του μονοπατιού που έχει δημιουργηθεί στην τρίτη ταινία (γιατί όχι νωρίτερα;). Επίσης παρατηρείστε ότι εάν η M_2 τερματίσει με μονοπάτι μήκους n, θα έχει το πολύ $r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$ αποτυχημένες προσπάθειες. Βλέπουμε λοιπόν ότι η προσομοίωση n βημάτων μιας μη ντετερμινιστικής μηχανής απαιτεί εκθετικό αριθμό πραγματικών (ντετερμινιστικών) βημάτων, κάτι που ακόμη δεν είμαστε βέβαιοι ότι πράγματι αποδεδειγμένα απαιτείται.

Με βάση τα παραπάνω έχει αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.3 : Εάν μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing M_1, αποδέχεται ή αποφασίζει μια γλώσσα ή υπολογίζει μια συνάρτηση, τότε υπάρχει μια κλασική μηχανή Turing M_2 που αποδέχεται ή αποφασίζει την ίδια γλώσσα ή υπολογίζει την ίδια συνάρτηση.

Δραστηριότητα 1.3 : Η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing του παραδείγματος 1.14 που αποδέχεται έναν σύνθετο αριθμό n μπορεί σχετικά εύκολα να τροποποιηθεί ώστε να αποφασίζει εάν ένας αριθμός είναι ή όχι σύνθετος. Περιγράψατε τις απαραίτητες αλλαγές και προσπαθήστε να δώσετε το γράφημα ροής αυτής της μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing . Προσδιορίστε, επίσης, το όριο $m \in N$ που θέτει ο σχετικός ορισμός.

$\diamond$

1.6 Γραμματικές

Έχοντας παρουσιάσει το μοντέλο της μηχανής Turing και των ισοδύναμων παραλλαγών του, προχωράμε να παρουσιάσουμε τις **γραμματικές χωρίς περιορισμούς** ως ένα ακόμη ισοδύναμο μοντέλο. Η ισοδυναμία αυτή είναι ανάλογη με αυτήν που υπάρχει μεταξύ αυτομάτων στοίβας και γραμματικών ελεύθερων συμφραζομένων, με την έννοια ότι οι μεν μηχανές Turing ορίζουν γλώσσες με το να τις "αναγνωρίζουν", (είτε αποφασίζοντας ή αποδεχόμενες αυτές), οι δε γραμματικές ορίζουν γλώσσες "γεννώντας" αυτές.

Οι γραμματικές χωρίς περιορισμούς, ή απλά **γραμματικές** ή ακόμη γνωστές ως **συστήματα επανεγγραφής** ή **γραμματικές φραστικής δομής** είναι μια φαινομενικά απλή, αλλά τελικά, πανίσχυρη επέκταση των γραμματικών ελεύθερων συμφραζομένων, επιτρέποντας το αριστερό μέρος των κανόνων τους να είναι μια συμβολοσειρά τερματικών και μη τερματικών συμβόλων με ένα τουλάχιστον μη τερματικό σύμβολο. Τυπικά έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.11 : Γραμματική, (ισοδύναμα, **γραμματική χωρίς περιορισμούς** ή **σύστημα απανεγγραφής** ή **γραμματική φραστικής δομής**) είναι μια τετράδα $G = (V, \Sigma, R, S)$, όπου

V είναι ένα **αλφάβητο**,

$\Sigma \subseteq V$ είναι το σύνολο των **τερματικών** συμβόλων ενώ το $V - \Sigma$ είναι το σύνολο των **μη τερματικών** συμβόλων,

R είναι το σύνολο των **κανόνων**, ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(V^*(V - \Sigma)V^*) \times V^*$ και

$S \in V - \Sigma$ είναι το **αρχικό** σύμβολο.

Γράφουμε $u \to v$ εάν $(u, v) \in R$. Γράφουμε $u \Rightarrow v$ εάν και μόνο εάν , για κάποια $w_1, w_2 \in V^*$ και κάποιον κανόνα $u' \to v', u = w_1 u' w_2$ και $v = w_1 v' w_2$. $\Rightarrow_G^*$ είναι η ανακλαστική, μεταβατική κλειστότητα του $\Rightarrow_G$. Λέμε ότι μια συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ **γεννιέται** από την G εάν και μόνο εάν $S \Rightarrow_G^* w$. Συμβολίζουμε με $L(G)$ την **γλώσσα που γεννιέται** από την G, δηλαδή το σύνολο όλων των συμβολοσειρών στο Σ^* που