ring αποφασίσιμη;" και "είναι Turing αποδεκτή η συμπληρωματική γλώσσα κάθε Turing αποδεκτής γλώσσας;" έχουν, όπως θα δειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο, αρνητική απάντηση.

1.4 Επεκτάσεις της μηχανής Turing

Η απλότητα του μοντέλου της μηχανής Turing έχει κάνει πολλούς ερευνητές να νομίσουν ότι θα μπορούσαν να εφεύρουν παραλλαγές του με μεγαλύτερες ικανότητες υπολογισμών ή αναγνώρισης γλωσσών. Έτσι μέχρι σήμερα έχουν διερευνηθεί αρκετές επεκτάσεις του κλασικού μας μοντέλου. Πριν αναφέρουμε τις κυριότερες από αυτές, ας δούμε μια μικρή παραλλαγή του δικού μας κλασικού μοντέλου. Όπως αναφέραμε και στην ενότητα ορισμού της κλασικής μηχανής Turing, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μετάπτωσης δ' του νέου μοντέλου είναι τέτοια που επιτρέπει στην μηχανή Turing σε ένα μόνο βήμα και να γράφει ένα σύμβολο στην ταινία και να κινηθεί μια θέση αριστερά, (L),ή δεξιά, (R), ή να παραμείνει στην θέση της, (S), δηλαδή

$$\delta' : K \times \Sigma \mapsto K \times \Sigma \times \{L, R, S\}.$$

Κάνει αυτή η αλλαγή την μηχανή Turing ισχυρότερη; π.χ., την κάνει να αναγνωρίζει πρόσθετες γλώσσες σε σχέση με την κλασική μηχανή Turing ; Η απάντηση είναι "όχι", διότι εύκολα μπορεί να μετατραπεί μια τέτοια μηχανή Turing σε κλασική. Πράγματι, ένα βήμα στο οποίο δεν κινείται η κεφαλή (δηλαδή, όταν $\delta'(q,a) = (p,b,S),\ q,p \in K,\ a,b \in \Sigma)$), αντιστοιχεί σε ένα βήμα $\delta(q,a) = (p,b),\ q,p \in K,\ a,b \in \Sigma)$ της κλασικής, ενώ ένα βήμα στο οποίο κινείται και η κεφαλή (δηλαδή, όταν $\delta'(q,a) = (p,b,X),\ q,p \in K,\ a,b \in \Sigma,\ X \in \{L,R\})$), αντιστοιχεί σε δύο βήματα της κλασικής, ένα για να γράφει στην ταινία b στην θέση του a, και ένα μετά για να κινηθεί αριστερά ή δεξιά, μέσω μιας κατάστασης q' "ενδιάμεσης" των καταστάσεων q και p (αφήνουμε στον αναγνώστη να επεξεργαστεί τις λεπτομέρειες σαν άσκηση αμέσως παρακάτω).

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.6 : Έστω η μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta', s, h)$, όπου

$$\begin{aligned} K &= \{q_0, q_1, h\} \\ \Sigma &= \{a, b, \#\} \\ s &= q_0 \end{aligned}$$

και συνάρτηση δ' της μορφής που αναφέραμε παραπάνω που δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα καταστάσεων:

	a	b	$\#$
q_0	(q_0, a, L)	(q_0, b, L)	$(q_1, \#, R)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_1, a, R)	$(h, \#, S)$

Μετατρέψτε την σε κλασική μηχανή Turing και πείτε τι αποτέλεσμα δίνει με αρχικό σχηματισμό $(s, \#aab\underline{b})$. $\diamond$

Ας αναφέρουμε αρχικά τις κυριότερες και πιο ουσιαστικές επεκτάσεις της μηχανής Turing που δείχνουν να ισχυροποιούν το κλασικό μοντέλο, αλλά που τελικά αποδεικνύονται ισοδύναμες με το κλασικό, με την έννοια για κάθε τέτοιο μοντέλο υπάρχει ισοδύναμο κλασικό. Αυτές είναι οι εξής:

- μηχανή Turing με μια ταινία άπειρη και προς τις δυο κατευθύνσεις (αριστερά και δεξιά),
- μηχανή Turing με πολλαπλές ταινίες και μια κεφαλή ανά ταινία,
- μηχανή Turing με μια ταινία και πολλαπλές κεφαλές,
- μηχανή Turing με δισδιάστατη ή πολυδιάστατη ταινία

Η αυστηρά τυπική απόδειξη της ισοδυναμίας των παραπάνω επεκτάσεων με την κλασική μηχανή Turing είναι μακροσκελής, λίγο επίπονη και κουραστική για τον σπουδαστή. Θα περιοριστούμε, λοιπόν, σε μια σκιαγράφηση των βασικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις ισοδυναμίας, διότι πολλές απ' αυτές είναι και διδακτικές και δίνουν εναύσματα για αντιμετώπιση παρόμοιων προβλημάτων. Σε κάθε περίπτωση θα περιγράψουμε μια κλασική μηχανή Turing που **προσομοιώνει** την αντίστοιχη επεκταμένη μηχανή Turing. Μάλιστα θα δοθούν ασκήσεις με ερωτήματα που θα ζητούν λεπτομέρειες σε κάποια σημεία υλοποίησης της προσομοίωσης.

Η απόδειξη της ισοδυναμίας, απαιτεί φυσικά, και την αντίστροφη απόδειξη, δηλαδή ότι μια παραλλαγή της κλασικής μηχανής Turing μπορεί να κάνει ό,τι κάνει και η κλασική. Η απόδειξη προς αυτήν την κατεύθυνση είναι για τις παραπάνω επεκτάσεις τόσο προφανής που την παραλείπουμε.

μηχανή Turing με άπειρη ταινία αριστερά και δεξιά

Για λόγους συντομογραφίας θα γράφουμε ως αδ-ταινία μια ταινία άπειρη και στις δυο κατευθύνσεις και δ-ταινία την άπειρη μόνο δεξιά. μια μηχανή Turing με αδ-ταινία μπορεί να οριστεί τυπικά ακριβώς όπως η κλασική μας Turing μηχανή. Η μόνη λειτουργική διαφορά είναι ότι δεν "κρεμάει" ποτέ.

Ένας υπολογισμός ξεκινά όπως και στην κλασική μηχανή Turing τοποθετώντας την συμβολοσειρά εισόδου κάπου στην ταινία μεταξύ δύο $\#$, με την κεφαλή στο δεξιό $\#$.

$\cdots$	A_{-4}	A_{-3}	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\cdots$

α) αδ-ταινία △

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\cdots$
$\not{C}$	A_{-1}	A_{-2}	A_{-3}	A_{-4}	$\cdots$

β) δ-ταινία △

Σχήμα 1.13: αδ-ταινία και η αντιστοιχία της με δ-ταινία

Η βασική τεχνική προσομοίωσης είναι αρχικά να δημιουργήσουμε στην δ-ταινία μια αδ-ταινία. Στο Σχήμα 1.13 φαίνεται η σχέση των θέσεων μεταξύ των δυο ταινιών. Παρατηρήστε το ειδικό σύμβολο $\not{C}$ που δείχνει το άκρο της δ-ταινίας που είναι και το σημείο στο οποίο "διπλώσαμε" την αδ-ταινία για να την κάνουμε δ-ταινία.

Η τεχνική έγκειται στην δημιουργία δυο ιχνών (πάνω και κάτω). Το πάνω ίχνος αντιστοιχεί στην ταινία που εκτείνεται από την αρχική θέση της κεφαλής προς τα δεξιά, και το κάτω ίχνος στην ταινία που εκτείνεται προς τα αριστερά της κεφαλής (η κεφαλή είναι στην αρχή της λειτουργίας στην θέση A_0. Η κεφαλή της κλασικής δ-ταινίας μηχανής Turing σε κάθε βήμα έχει την δυνατότητα να διαβάζει και γράφει και από τα δυο ίχνη (δηλαδή, δυο σύμβολα κάθε φορά). Όμως κάθε φορά λαμβάνει υπόψη της μόνο το ένα από τα δυο σύμβολα, ανάλογα εάν εργάζεται με το πάνω ή το κάτω ίχνος. Όταν η δ-ταινίας μηχανή Turing προσομοιώνει την αδ-ταινίας μηχανή Turing με το πάνω ίχνος, τότε μια δεξιά κίνηση της κεφαλής της μιας αντιστοιχεί σε δεξιά κίνηση και της άλλης. Το ίδιο ισχύει και για μια αριστερή κίνηση. Η αντιστοιχία κίνησης της κεφαλής αντιστρέφεται όταν η δ-ταινίας μηχανή Turing προσομοιώνει την αδ-ταινίας μηχανή Turing στο κάτω ίχνος. Η αλλαγή λειτουργίας από το ένα ίχνος στο άλλο γίνεται αντιληπτή με την βοήθεια του ειδικού συμβόλου $\not{C}$.

μηχανή Turing με πολλαπλές ταινίες, (k-ταινιών μηχανή Turing)

Μια k-ταινιών μηχανή Turing έχει k το πλήθος ταινίες, κάθε μια της μορφής δ-ταινία, με μια κεφαλή ανά ταινία. Τυπικά μια k-ταινιών μηχανή Turing ορίζεται ως $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$, με K, Σ, s, h, όπως και στην κλασική μηχανή Turing και με $\delta : K \times \Sigma^k \mapsto K \times (\Sigma \cup \{L, R\})^k$. Με απλά λόγια, η k-ταινιών μηχανή Turing σε κάθε της βήμα διαβάζει k σύμβολα από τις ταινίες, ένα από κάθε μια ταινία, και ανάλογα την παρούσα της κατάσταση, μεταπίπτει σε μια νέα κατάσταση με βάση την δ, και σε κάποιες ταινίες γράφει νέα σύμβολα στην θέση αυτών που διάβασε ενώ στις υπόλοιπες ταινίες κινεί τις κεφαλές τους δεξιά ή αριστερά, ανεξάρτητα την μια από την άλλη. Εάν έστω και μια κεφαλή κινηθεί έξω από το αριστερό άκρο της ταινίας της, η μηχανή Turing "κρεμάει".

Η έννοια του σχηματισμού της κλασικής μηχανής Turing επεκτείνεται εύκολα για

$\#$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\#$	$\cdots$
$\#$	$\#$	$\#$	$\cdots$	$\#$	$\not{C}$	$\cdots$
$\#$	$\#$	$\#$	$\cdots$	$\#$	$\#$	$\cdots$
$\not{C}$	$\#$	$\#$	$\cdots$	$\#$	$\#$	$\cdots$
$\#$	$\#$	$\#$	$\cdots$	$\#$	$\#$	$\cdots$
$\not{C}$	$\#$	$\#$	$\cdots$	$\#$	$\#$	$\cdots$

$\triangle$

Σχήμα 1.14: Προσομοίωση των ταινιών μιας μηχανή Turing με τρεις ταινίες

να περιλάβει μια k-άδα από καταστάσεις ταινίας της μορφής $w\underline{a}u$. Ένας υπολογισμός ξεκινά τοποθετώντας την συμβολοσειρά εισόδου στο αριστερό μέρος της πρώτης ταινίας, $\#w\underline{\#}$, με τις υπόλοιπες ταινίες κενές και τις κεφαλές τους στο αριστερό άκρο.

Η προσομοίωση της μηχανής από την κλασική μηχανή Turing γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση της αδ-ταινίας. Συγκεκριμένα, η ταινία της κλασικής μηχανή Turing χωρίζεται αρχικά σε $2k$ ίχνη, δυο για κάθε ταινία της άλλης με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 1.14. Το πρώτο ίχνος ενός ζεύγους ιχνών περιέχει ό,τι και η αντίστοιχη ταινία της k-ταινιών μηχανή Turing, ενώ το άλλο ίχνος είναι κενό πλην μιας θέσης που περιέχει το σύμβολο $\not{C}$, που σημαδεύει την θέση της κεφαλής στην ταινία της k-ταινιών μηχανής Turing . Με τον τρόπο αυτόν δημιουργούμε k **εικονικές** ταινίες και k **εικονικές** κεφαλές!

Η προσομοίωση ενός υπολογισμού της k-ταινιών μηχανής Turing με την κλασική μηχανή Turing, μετά τον χωρισμό της ταινίας της σε $2k$ ίχνη και την τοποθέτηση της συμβολοσειράς εισόδου, περιλαμβάνει την επανάληψη της ακόλουθης σειράς ενεργειών, ξεκινώντας κάθε φορά με την κεφαλή της ταινίας στη δεξιότερη θέση της ταινίας που σε κάποιο ίχνος της υπάρχει σημάδι κεφαλής $\not{C}$ (δηλαδή από την θέση της δεξιότερης εικονικής κεφαλής):

- Σάρωση αριστερά της ταινίας, διαβάζοντας και "απομνημονεύοντας" τα σύμβολα που είναι στις θέσεις των εικονικών κεφαλών (η σάρωση αυτή γίνεται μέχρι την θέση της αριστερότερης εικονικής κεφαλής). Η απομνημόνευση γίνεται με μετάπτωση σε κατάσταση που αντανακλά τα σύμβολα με την σειρά που αυτά διαβάζονται.
- Επιστροφή της κεφαλής στην αρχική θέση και με την μονάδα ελέγχου της μηχανής Turing σε μια κατάσταση που αντανακλά την k-άδα των συμβόλων που διαβάστηκαν στη προηγούμενη σάρωση.
- Σάρωση ξανά αριστερά της ταινίας ενημερώνοντας κατάλληλα τις εικονικές ταινίες και κεφαλές. Η ενημέρωση σημαίνει για κάποια ίχνη εγγραφή συμβόλου στην θέση της εικονικής κεφαλής, σε άλλα ίχνη μετακίνηση της εικονικής κεφαλής αριστερά

και στα υπόλοιπα ίχνη μετακίνηση της εικονικής κεφαλής δεξιά.

- Επιστροφή στην θέση της αριστερότερης εικονικής κεφαλής και σε μια κατάσταση ανάλογη αυτής που θα μετέπιπτε η k-ταινιών μηχανή Turing.

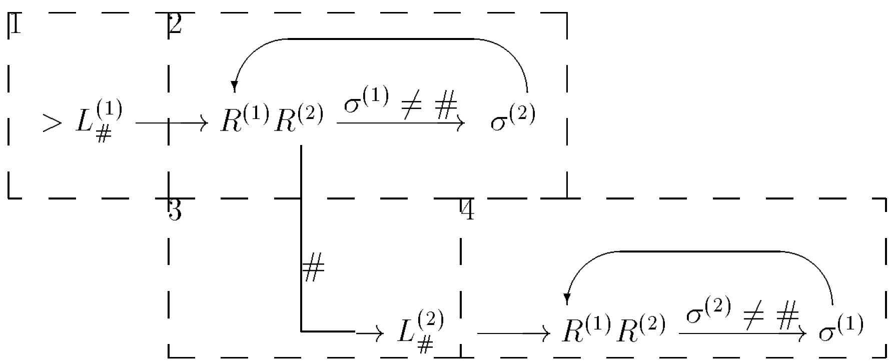
Αφήνοντας κατά μέρος πολλές λεπτομέρειες δεν είναι δύσκολο να πειστεί κανείς ότι πράγματι με τον τρόπο αυτόν μια κλασική μηχανή Turing προσομοιώνει μια k-ταινιών μηχανή Turing.

Παράδειγμα 1.13 : Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι με τη βοήθεια των πολλαπλών ταινιών είναι συχνά ευκολότερο να κατασκευάσουμε μια μηχανή Turing που θα εκτελεί μια συγκεκριμένη εργασία. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, τη διεργασία της μηχανής αντιγραφής C του Σχήματος 1.6 που μετασχηματίζει τη συμβολοσειρά $\#w\underline{\#}$ σε $\#w\#w\underline{\#}$, όπου το w δεν περιέχει κενά. Μια μηχανή Turing δύο ταινιών μπορεί να το επιτύχει αυτό ως εξής:

1. Μετακίνησε την κεφαλή στην πρώτη ταινία μέχρι να βρεθεί ένα κενό.
2. Μετακίνησε τις κεφαλές και στις δυο ταινίες στα δεξιά, αντιγράφοντας κάθε σύμβολο της πρώτης ταινίας στη δεύτερη ταινία, μέχρι να βρεθεί ένα κενό στην πρώτη ταινία.
3. Μετακίνησε την κεφαλή στη δεύτερη ταινία στα αριστερά μέχρι να βρεθεί ένα κενό.
4. Μετακίνησε ξανά τις κεφαλές και στις δυο ταινίες στα δεξιά, αυτήν τη φορά αντιγράφοντας σύμβολα από τη δεύτερη ταινία στην πρώτη ταινία. Τερμάτισε όταν βρεθεί ένα κενό στη δεύτερη ταινία. ◇

μηχανές Turing με περισσότερες από μια ταινίες μπορούν να απεικονιστούν με παρόμοιο τρόπο με τον οποίο απεικονίζονται μηχανές Turing μιας ταινίας. Η μόνη προσθήκη στον συμβολισμό μας είναι να επισυνάπτουμε έναν εκθέτη σε κάθε κομβική μηχανή, που δηλώνει την ταινία στην οποία ενεργεί, με όλες τις άλλες ταινίες να μένουν ανέπαφες. Για παράδειγμα, η $\#^{(2)}$ γράφει ένα κενό στη δεύτερη ταινία και η $L_{\#}^{(1)}$ ψάχνει προς τα αριστερά για ένα κενό στην πρώτη ταινία. Χρησιμοποιώντας αυτήν τη σύμβαση, η έκδοση των 2-ταινιών της μηχανής C μπορεί να απεικονιστεί όπως στο Σχήμα 1.15. Τα κουτιά περικλείουν τις μηχανές που εκτελούν τις παραπάνω ενέργειες.

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.7 : Θεωρείστε μια k-ταινιών μηχανή Turing με αλφάβητο Σ με $|\Sigma|$ το πλήθος διαφορετικά σύμβολα και $|K|$ το πλήθος διαφορετικές καταστάσεις. Πόσο είναι το ελάχιστο πλήθος καταστάσεων μιας κλασικής μηχανή Turing που την προσομοιώνει; ◇



Σχήμα 1.15: 2-ταινιών μηχανή Turing αντιγραφής

μηχανή Turing με μια ταινία και πολλαπλές κεφαλές

Η περίπτωση αυτή αφορά μια μηχανή Turing με πολλές κεφαλές στην ίδια ταινία, που σε ένα βήμα λειτουργίας της, όλες οι κεφαλές διαβάζουν τα σύμβολα που σαρώνονται και μετά μετακινούνται δεξιά ή αριστερά ή γράφουν ανεξάρτητα η μια της άλλης. Οι κεφαλές μπορούν να διασταυρώνονται καθώς μετακινούνται χωρίς να συγκρούονται. Υποθέτουμε, επίσης, ότι κάποια σύμβαση ισχύει για το τι συμβαίνει όταν δυο κεφαλές που τυχαίνει να είναι στην ίδια θέση της ταινίας επιχειρούν να γράψουν διαφορετικά σύμβολα, (π.χ., οι κεφαλές να έχουν έναν αύξοντα αριθμό και να υπερισχύει η κεφαλή με τον μικρότερο αριθμό).

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μια τεχνική προσομοίωσης παρόμοια με αυτήν της k-ταινιών μηχανής Turing μπορεί να εφαρμοστεί και εδώ. Η βασική ιδέα είναι πάλι να χωρίσουμε την ταινία της κλασικής μηχανής Turing σε $k+1$ ίχνη για μια k-κεφαλών μηχανή Turing, όπου το ένα ίχνος χρησιμεύει για το περιεχόμενο της ταινίας της k κεφαλών μηχανής Turing και τα άλλα k ίχνη για να καταγράφουν τις θέσεις των k κεφαλών της.

Για να προσομοιώσουμε ένα υπολογιστικό βήμα της k κεφαλών μηχανής Turing, η ταινία πρέπει να σαρωθεί τουλάχιστον δυο φορές, μια για να διαβαστούν τα σύμβολα στις θέσεις των κεφαλών και άλλη μια για να αλλαχθούν κάποια σύμβολα ή να μετακινηθούν κατάλληλα κάποιες κεφαλές.

Δραστηριότητα 1.1 : Η χρήση πολλαπλών κεφαλών, όπως και με πολλαπλές ταινίες, μπορεί μερικές φορές να απλοποιήσει δραστικά την κατασκευή μηχανών Turing. Μια παραλλαγή 2-κεφαλών της μηχανής αντιγραφής C του Σχήματος 1.6, μπορεί για παράδειγμα να λειτουργήσει με τέτοιο τρόπο ο οποίος είναι πολύ πιο αποδοτικός από εκείνους της κλασικής μηχανής Turing και της 2-ταινιών μηχανής Turing . Περιγράψτε μια τέτοια μηχανή δίνοντας και το αντίστοιχο γράφημα ροής της υιοθετώντας έναν εκθέτη που δείχνει την κεφαλή που χρησιμοποιεί μια κομβική μηχανή και δείκτες $1, 2$ στα σύμβολα που είναι τοποθετημένες οι δυο κεφαλές. $\diamond$

μηχανή Turing με δισδιάστατη ή πολυδιάστατη ταινία

Στην περίπτωση μιας μηχανής Turing με δισδιάστατης ταινίας, μπορούμε να φανταστούμε την ταινία να είναι χωρισμένη σε τετράγωνα και να καλύπτει το πρώτο τεταρτημόριο επεκτεινόμενο στο άπειρο και προς τις δυο διαστάσεις. Ακόμη μπορούμε να φανταστούμε μια μηχανή Turing με ταινία πολλών διαστάσεων. Σε κάθε περίπτωση, και δεδομένου ότι οι θέσεις μιας τέτοιας πολυδιάστατης ταινίας είναι απαριθμήσιμες, μπορούμε να τις αντιστοιχίσουμε σε θέσεις της ταινίας μιας κλασικής μηχανής Turing η οποία και θα προσομοιώσει την μηχανή Turing με την πολυδιάστατη ταινία.

Μέχρι τώρα δώσαμε παραλλαγές της κλασικής μηχανής Turing με εμφανώς επεκταμένα χαρακτηριστικά. Στην συνέχεια θα αναφέρουμε μερικές παραλλαγές με εμφανώς περιορισμένα χαρακτηριστικά. Αυτοί οι περιορισμοί δίνουν αρχικά την εντύπωση ασθενέστερων μηχανών Turing, που όμως τελικά έχουν αποδειχθεί ισοδύναμες με την κλασική. Η αναφορά γίνεται για λόγους πληρότητας του θέματος, χωρίς πολλές επεξηγήσεις. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην βιβλιογραφία που δίνουμε. Οι περιορισμένες μηχανές Turing είναι οι ακόλουθες:

1. ένα ντετερμινιστικό αυτόματο με δύο στοίβες,
2. μια μηχανή τεσσάρων απαριθμητών,
3. μια μηχανή δύο απαριθμητών,
4. μια κλασική μηχανή Turing με $\Sigma = \{0, 1, \#\}$

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα κάνοντας αναφορά στην λεγόμενη **μηχανή Turing τυχαίας πρόσβασης**. Η μηχανή αυτή θυμίζει πολύ έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Διαθέτει μια ταινία στην οποία έχει την δυνατότητα τυχαίας πρόσβασης σε οποιαδήποτε θέση της ταινίας (σε αντίθεση με την ακολουθιακή δυνατότητα της κλασικής μηχανής Turing). Επίσης διαθέτει έναν αριθμό από καταχωρητές, ένας εκ των οποίων είναι συσσωρευτής. Τέλος διαθέτει ένα σύνολο εντολών που θυμίζουν το ρεπερτόριο εντολών ενός υπολογιστή, και έναν απαριθμητή εντολών που καθορίζει την επόμενη για εκτέλεση εντολή. Το υπό εκτέλεση "πρόγραμμα" είναι καθορισμένο για κάθε τέτοια μηχανή Turing τυχαίας πρόσβασης (δηλαδή, δεν είναι υπολογιστής προγραμματιζόμενος γενικού σκοπού). Προσεκτική και λεπτομερής τυποποίηση αυτής της μηχανής Turing αποδεικνύει την ισοδυναμία της με την κλασική. Λεπτομέρειες ξεφεύγουν από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην βιβλιογραφία που δίνουμε.