$$\begin{tikzcd} > L_\# \arrow[r] & R \arrow[r, "\sigma \neq \#"] \arrow[dr, "\#"] & \#R_\#^2\sigma L_\#^2\sigma \arrow[l, bend right] \\ & & R_\# \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.6: Γράφημα μηχανής Turing C

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.3 : Θεωρήστε την μηχανή Turing C με το διάγραμμα ροής του Σχήματος 1.6 και έστω ότι ξεκινά με αρχικό σχηματισμό $(s, \#abc\underline{\#})$. Παρακολουθήστε την λειτουργία της, ακολουθώντας το διάγραμμα ροής της και καταγράφοντας τις διαδοχικές μεταβολές του σχηματισμού μετά από κάθε κόμβο του διαγράμματος (δηλαδή μετά τους κόμβους $L_\#, R, \#R_\#^2\sigma L_\#^2\sigma, R_\#$). Τι κάνει η μηχανή Turing όταν η συμβολοσειρά εισόδου είναι γενικά της μορφής $\#w\#$, όπου η συμβολοσειρά w δεν περιέχει $\#$; Ποιος είναι ο τελικός σχηματισμός; Περιγράψετε με μια πρόταση τι κάνει η μηχανή Turing C γενικά. $\diamond$

1.3 Υπολογισμοί με μηχανές Turing

Στο εδάφιο 1.1 δώσαμε τον ορισμό του "υπολογισμού" σαν μια ακολουθία σχηματισμών της μηχανής Turing . Σ' αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε με πιο συγκεκριμένο τρόπο τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια μηχανή Turing χρησιμοποιείται για να αναγνωρίσει μια γλώσσα ή για να υπολογίσει μια συνάρτηση.

Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι μια γλώσσα L είναι ένα σύνολο συμβολοσειρών από ένα αλφάβητο Σ. Μια συμβολοσειρά είναι μια παράθεση πεπερασμένου πλήθους συμβόλων από το αλφάβητο Σ, δηλαδή $L \subseteq \Sigma^*$. Όπως και στην περίπτωση των πεπερασμένων αυτομάτων, έτσι και για τις μηχανές Turing, μας ενδιαφέρει να τις δούμε σαν μηχανισμούς αναγνώρισης γλωσσών, δηλαδή να μας πούνε εάν μια δοθείσα συμβολοσειρά w ανήκει ή όχι σε μια δοθείσα γλώσσα. Σε ό,τι αφορά τις συναρτήσεις θεωρούμε συναρτήσεις είτε από συμβολοσειρές σε συμβολοσειρές, ή από αριθμούς σε αριθμούς, δηλαδή, είτε $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*$, ή $f : N \mapsto N$, με $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ τους φυσικούς αριθμούς. Η περίπτωση των φυσικών αριθμών ανάγεται εύκολα σ' αυτήν των συμβολοσειρών δεδομένου ότι ένας φυσικός αριθμός n μπορεί να παρασταθεί στο **μοναδιαίο** σύστημα, με την συμβολοσειρά I^n, (το μηδέν αντιστοιχεί στην κενή συμβολοσειρά e), όπου I ένα σύμβολο διαφορετικό του $\#$. Άλλος, πιο γνωστός τρόπος αναπαράστασης φυσικών αριθμών είναι αυτός του δυαδικού συστήματος που χρησιμοποιούμε στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Πράγματι, ένας φυσικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί με μια συμβολοσειρά στο $\{0, 1\}^*$.

Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι η συμβολοσειρά εισόδου w, πάνω στην οποία θα ενεργήσει η μηχανή Turing, τοποθετείται στην αριστερή άκρη της ταινίας μεταξύ δυο κενών συμβόλων, (και φυσικά η συμβολοσειρά εισόδου δεν περιέχει κενά σύμβολα), και η κεφαλή είναι αμέσως στα δεξιά της. Με άλλα λόγια, ο αρχικός σχηματισμός είναι

$$\begin{tikzcd} > L \arrow[r, "\sigma \neq \#"] \arrow[dr, "\#"'] & \overline{\sigma} \arrow[l, bend right] \\ & R_{\#} \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.7: μηχανή Turing που υπολογίζει την $f(w) = \overline{w}$

ο $(s, \#w\underline{\#})$. Έχοντας υιοθετήσει τις παραπάνω συμβάσεις δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 1.5 : Έστω το αλφάβητο Σ_0 με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\#\}$. Έστω f μια συνάρτηση από το Σ_0^* στο Σ_0^*. Λέμε ότι μια μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$ **υπολογίζει** την f αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ με $f(w) = u$, ισχύει

$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#u\underline{\#}).$$

Λέμε ότι η f είναι **Turing υπολογίσιμη συνάρτηση**, ή ισοδύναμα **αναδρομική** εάν υπάρχει μια μηχανή Turing που την υπολογίζει.

Σημειώστε ότι μια μηχανή Turing που υπολογίζει μια συνάρτηση, δεν κρεμάει για καμιά συμβολοσειρά από το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης, διότι διαφορετικά δεν υπολογίζει την συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι μια μηχανή Turing που υπολογίζει μια συνάρτηση, ποτέ δεν προσπαθεί να διαβάσει κάποια θέση της ταινίας στα αριστερά της κενής θέσης που οριοθετεί το αριστερό άκρο της συμβολοσειράς εισόδου.

Παράδειγμα 1.8 : Έστω $\Sigma_0 = \{a, b\}$ και έστω ότι η $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*$ που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $f(w) = \overline{w}$, όπου $\overline{w}$ είναι η συμβολοσειρά που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του a στο w με το b και αντίστροφα. Τότε η f υπολογίζεται από μια μηχανή Turing M η οποία σαρώνει προς τα αριστερά την είσοδό της αλλάζοντας τα a σε b και αντίστροφα, μέχρι να βρεθεί στην κενή θέση. Στη συνέχεια η M επιστρέφει την κεφαλή της στην αρχική της κενή θέση. Η μηχανή Turing που κάνει αυτόν τον υπολογισμό είναι μια μικρή τροποποίηση της μηχανής Turing του παραδείγματος 1.1 και του γραφήματος ροής της που δώσαμε στο (ε) μέρος του Σχήματος 1.4. Το γράφημα ροής της M είναι το εξής:

Το γράφημα έχει τρεις κόμβους, $L, \overline{\sigma}, R_{\#}$. Οι δύο πρώτοι κόμβοι δημιουργούν έναν κύκλο ο οποίος διατρέχεται τόσες φορές όσο είναι το "μήκος" της συμβολοσειρά εισόδου και διακόπτεται όταν η κεφαλή φθάσει στην αρχή της ταινίας, όπου έχει $\#$. Τότε η μηχανή Turing συνεχίζει την λειτουργία της ως μηχανή $R_{\#}$ για να φέρει την

$$\begin{tikzcd} > L \arrow[r, "\sigma \neq \#"] \arrow[dr, "\#"'] & \#R_{\#}\sigma L_{\#}\sigma \arrow[l, bend right] \\ & R_{\#} \end{tikzcd}$$

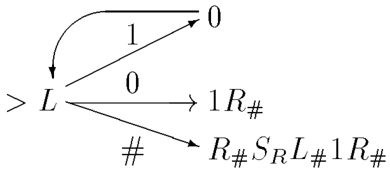
Σχήμα 1.8: Γράφημα μηχανής Turing υπολογισμού της $f(w) = ww^R$

κεφαλή στην πρώτη δεξιά κενή θέση. $\diamond$

Παράδειγμα 1.9 : Έστω τυχόν αλφάβητο Σ_0 που δεν περιέχει το κενό σύμβολο $\#$ και έστω ότι η συνάρτηση $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*$ που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $f(w) = ww^R$. Τότε η f υπολογίζεται από την μηχανή Turing του Σχήματος 1.8. Η μηχανή μετασχηματίζει την συμβολοσειρά εισόδου $\#\sigma_1 \cdots \sigma_n \underline{\#}$, όπου $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \Sigma_0$, διαδοχικά στην συμβολοσειρά $\#\sigma_1 \cdots \underline{\sigma_i} \cdots \sigma_n \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+1}$ για $i = n-1, n-2, \ldots, 0$. Για $i = 0$ γίνεται $\underline{\#}\sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma_n \cdots \sigma_1$ η οποία μετασχηματίζεται τελικά στην $\#\sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma_n \cdots \sigma_1 \underline{\#}$. Ο αναγνώστης προτρέπεται να καταγράψει τους διαδοχικούς σχηματισμούς για τους δυο πρώτους κύκλους του μετασχηματισμού. Είναι εύκολο να γίνει αντιληπτό ότι ένα σύμβολο σ της συμβολοσειράς w που μεταφέρεται από αριστερά προς τα δεξιά, (δείτε τον κόμβο $\#R_{\#}\sigma L_{\#}\sigma$), αρχικά γίνεται $\#$ και αφού μεταφερθεί δεξιά, επαναγράφεται αριστερά στην θέση του. Στο σημείο αυτό ο αναγνώστης πρέπει να καταλάβει ότι η μηχανή Turing θυμάται τα διαφορετικά σύμβολα που μεταφέρει δεξιά μέσω διαφορετικών ακολουθιών καταστάσεων της. $\diamond$

Ο ορισμός της Turing υπολογίσιμης συνάρτησης από συμβολοσειρές σε συμβολοσειρές μπορεί να επεκταθεί για συναρτήσεις με οποιοδήποτε πλήθος από ορίσματα ακόμη και μηδέν ορίσματα. Πράγματι, έστω ότι f είναι μια συνάρτηση από το $(\Sigma_0^*)^k$ στο Σ_0^*, όπου $k \geq 0$, και έστω M μια μηχανή Turing $(K, \Sigma, \delta, s, h)$ με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\#\}$. Έστω ότι για κάθε $w_1, \ldots, w_k \in \Sigma_0^*$, εάν $f(w_1, \ldots, w_k) = u$ τότε $(s, \#w_1\#w_2\# \ldots \#w_k\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#u\underline{\#})$. Τότε λέμε ότι η M **υπολογίζει** την f και ότι η f είναι **Turing υπολογίσιμη**, ή ισοδύναμα **αναδρομική**.

Με την χρησιμοποίηση του μοναδιαίου συστήματος για την αναπαράσταση φυσικών αριθμών, θα λέμε επίσης, ότι η συνάρτηση $f : N \mapsto N$ υπολογίζεται από μια μηχανή Turing M εάν η M υπολογίζει την αντίστοιχη συνάρτηση $f' : \{I\}^* \mapsto \{I\}^*$, όπου $f'(I^n) = I^{f(n)}$ για κάθε $n \in N$. Γενικότερα, μια μηχανή Turing υπολογίζει μια συνάρτηση $f : N^k \mapsto N$ αν υπολογίζει τη συνάρτηση $f' : (\{I\}^*)^k \mapsto \{I\}^*$, όπου $f'(I^{n_1}, \ldots, I^{n_k}) = I^{f(n_1, \ldots, n_k)}$ για κάθε $n_1, \ldots, n_k \geq 0$. Μια συνάρτηση από αριθμούς σε αριθμούς, ή από k-άδες αριθμών σε αριθμούς είναι **Turing υπολογίσιμη**, ή ισοδύναμα, **αναδρομική** αν υπάρχει μηχανή Turing που την υπολογίζει. Αντίστοιχους ορισμούς μπορούμε να αναπτύξουμε για την περίπτωση της δυαδικής αναπαράστασης των φυσικών αριθμών.



Σχήμα 1.9: μηχανή Turing που υπολογίζει την $f(n) = n + 1$ στο δυαδικό σύστημα

Παράδειγμα 1.10 : έστω f η συνάρτηση "επόμενου": $f(n) = n + 1$ για κάθε $n \in N$. Εάν χρησιμοποιήσουμε το μοναδιαίο σύστημα, τότε η μηχανή Turing M που υπολογίζει την f είναι αφάνταστα απλή. Πράγματι η μηχανή Turing $> IR$ με αρχικό σχηματισμός $(s, \#I^n\underline{\#})$, γράφει ένα I στη κενή θέση της ταινίας στην οποία είναι αρχικά τοποθετημένη, μετακινεί την κεφαλή μια θέση δεξιά και τερματίζει. Εάν χρησιμοποιήσουμε το δυαδικό σύστημα, τότε η αντίστοιχη μηχανή Turing είναι αυτήν του Σχήματος 1.9.

Στο γράφημα ροής που δίνουμε, η μηχανή S_R είναι η μηχανή Turing δεξιάς ολίσθησης του παραδείγματος 1.7. $\diamond$

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.4 : Παρακολουθήστε το γράφημα ροής της δυαδικής μηχανής Turing "επομένου" (Σχήμα 1.9 για τις εισόδους $\#101\underline{\#}$ και $\#111\underline{\#}$ καταγράφοντας την ακολουθία των κόμβων που ενεργοποιούνται και των καταστάσεων της ταινίας μετά κάθε κόμβο. $\diamond$

Προχωρούμε τώρα στην χρήση των μηχανών Turing ως αναγνωριστών γλωσσών.

Ορισμός 1.6 : 'Εστω η μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$ και έστω τα ειδικά σύμβολα Y και N ανήκουν στο Σ (αντιστοιχούν στις έννοιες "ναι" και "όχι"). 'έστω η γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\#, Y, N\}$. Λέμε ότι η μηχανή Turing M **αποφασίζει** την γλώσσα L εάν και μόνο εάν

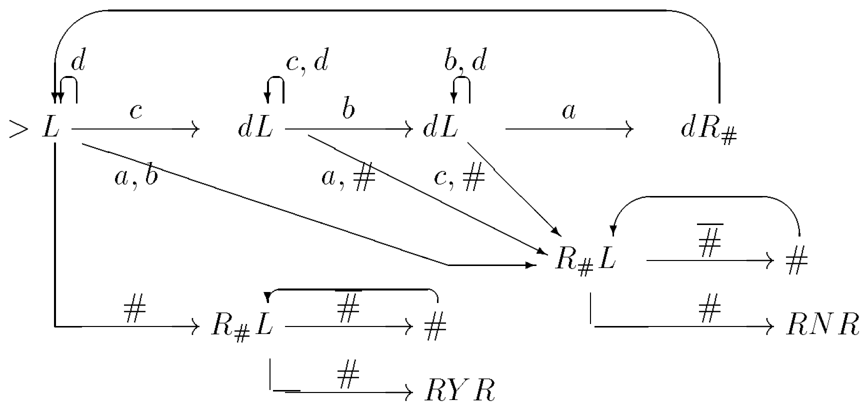
$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#Y\underline{\#}) \ \forall w \in \Sigma_0^*$$

και

$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#N\underline{\#}) \ \forall w \notin \Sigma_0^*.$$

Καλούμε μια γλώσσα **Turing αποφασίσιμη**, ή ισοδύναμα, **αναδρομική** εάν υπάρχει μηχανή Turing που την αποφασίζει.

Με απλά λόγια, μια μηχανή Turing αποφασίζει μια γλώσσα εάν για κάθε δεδομένη



Σχήμα 1.10: μηχανή Turing που αποφασίζει την γλώσσα $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$

συμβολοσειρά εισόδου w, μπορεί να τερματίσει δίνοντας πάνω στην ταινία την σωστή απάντηση, "ναι" όταν η συμβολοσειρά ανήκει στην γλώσσα και "όχι" όταν δεν ανήκει.

Παράδειγμα 1.11 : Έστω η γλώσσα $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$ που δεν αναγνωρίζεται ούτε από πεπερασμένα αυτόματα ούτε από αυτόματα στοίβας. Αντίθετα η μηχανή Turing M του Σχήματος 1.10 αποφασίζει την γλώσσα ως εξής:

Με αρχικό σχηματισμό $(s, \#a...ab...bc...c\underline{\#})$ η M εκτελεί n κύκλους. Σε κάθε κύκλο διαγράφει (μετατρέποντας το σε d) διαδοχικά ένα c, ένα b και ένα a καθώς κινείται η κεφαλή προς τα αριστερά, και μετά επιστρέφει η κεφαλή στην αρχική θέση της, για να επαναλάβει τον ίδιο κύκλο (στο Σχήμα 1.10 ο κύκλος είναι στην οριζόντια κατεύθυνση). Εάν σε κάποιον κύκλο δεν βρεθεί μια ακολουθία από c, b, a, τότε ο κύκλος διακόπτεται, η κεφαλή κινείται στην αρχική της θέση, στη συνέχεια κινείται προς τα αριστερά, σβήνοντας την ταινία μέχρι το αριστερό άκρο της, γράφει N και σταματά. Αντίθετα, εάν η συμβολοσειρά εισόδου είναι πράγματι της μορφής $a^n b^n c^n$, τότε θα ολοκληρωθούν n κύκλοι και μετά, αφού πρώτα σβηστεί η ταινία, θα γραφεί η απάντηση Y και η μηχανή Turing θα τερματίσει. ◇

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.5 : Ακολουθήστε το γράφημα ροής της παραπάνω M με συμβολοσειρές εισόδου τις $aabbcc$, ac, $abbc$ και e. Για κάθε περίπτωση, γράψτε την ακολουθία των κόμβων που ακολουθεί η μηχανή Turing μαζί με αντίστοιχες διαδοχικές καταστάσεις της ταινίας μετά το τέλος λειτουργίας κάθε κόμβου. ◇

Δεδομένου ότι μια μηχανή Turing αντιμετωπίζει και την περίπτωση να πέσει σε βρόχο, δηλαδή, να μην σταματήσει ποτέ, όταν λέμε ότι μια μηχανή Turing αποφασίζει μια γλώσσα ή υπολογίζει μια συνάρτηση πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι πράγματι η μηχανή Turing τερματίζει για όλες τις δυνατές εισόδους. Δυστυχώς αυτό είναι κάτι που αποδεδειγμένα, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, δεν μπορούμε να πούμε πάντα με βεβαιότητα εκ των προτέρων, δηλαδή πριν βάλουμε την μηχανή Turing να δουλέψει. Μα ακόμη και τότε, δυστυχώς, δεν μπορούμε να πούμε ότι θα σταματήσει, εάν δεν την δούμε να σταματά! Παρόλο αυτό το αδύνατο σημείο μηχανές Turing που αποφασίζουν μια γλώσσα ή που υπολογίζουν μια συνάρτηση είναι χρήσιμοι μηχανισμοί, ταυτισμένοι με την έννοια του **αλγόριθμου**, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε μια ακόμη περισσότερο προβληματική κατηγορία Turing μηχανών αναγνώρισης μιας γλώσσας, αυτήν που η μηχανή Turing τερματίζει εάν και μόνο εάν η δοθείσα συμβολοσειρά εισόδου ανήκει στη γλώσσα . Λέμε περισσότερο προβληματική διότι είναι εξ' ορισμού προβληματική όταν μας λέει ότι **ισχύει** κάτι εάν και μόνο εάν η μηχανή Turing **σταματά**, (ισοδύναμα, αυτό το κάτι **δεν** ισχύει εάν και μόνο εάν η μηχανή Turing **δεν** σταματά), πράγμα που όπως είπαμε δεν γνωρίζουμε πριν ή η μηχανή Turing σταματήσει! Συνέπεια αυτού είναι ότι μηχανές Turing που αναγνωρίζουν γλώσσες με την παραπάνω σύμβαση, δεν μας είναι γενικά χρήσιμες σαν αλγόριθμοι επίλυσης κάποιου προβλήματος.

Τυπικά η περίπτωση αυτή ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.7 : Έστω η μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$ και έστω η γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\#\}$. Λέμε ότι η μηχανή Turing M **αποδέχεται**, ή ισοδύναμα, bf μισο-αποφασίζει την γλώσσα L εάν για οποιαδήποτε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ ισχύει $w \in L$ εάν και μόνο εάν η M τερματίζει με συμβολοσειρά εισόδου w (δηλαδή, όταν από τον αρχικό σχηματισμό $(s, \#w\underline{\#})$ φθάνει σε ένα σχηματισμό τερματισμού της μορφής $(h, u\underline{a}v$ με $a \in \Sigma$ και $u, v \in \Sigma^*)$. Καλούμε μια γλώσσα **Turing αποδεκτή**, ή ισοδύναμα, **αναδρομικά απαριθμήσιμη** εάν υπάρχει μηχανή Turing που την αποδέχεται.

Ο παραπάνω ορισμός δεν απαιτεί κάποια συγκεκριμένη συμβολοσειρά εξόδου όταν η μηχανή Turing αποδέχεται μια συμβολοσειρά που ανήκει στη γλώσσα L . Μας αρκεί η M να τερματίζει. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό η μηχανή Turing **δεν** πρέπει να τερματίζει εάν η συμβολοσειρά εισόδου δεν ανήκει στην γλώσσα .

Παράδειγμα 1.12 : έστω $\Sigma_0 = \{a, b\}$ και έστω $L = \{w \in \Sigma_0^*$, το w περιέχει τουλάχιστον ένα $a\}$. Τότε η L είναι Turing αποδεκτή από την μηχανή $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$ όπου $K = \{s, h\}, \Sigma = \{a, b, \#\}$ και η συνάρτηση δ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	b	$\#$
s	(h, a)	(s, L)	(s, L)

Αυτή η μηχανή όταν ξεκινά με τον σχηματισμό $(s, \#w\underline{\#})$ για κάποιο $w \in \Sigma_0^*$

$$
\begin{array}{l}
> ML \xrightarrow{N} N \circlearrowleft \\
\quad\;\; \llcorner\!\xrightarrow{Y} R
\end{array}
$$

Σχήμα 1.11: μηχανή Turing που αποδέχεται μια Turing αποφασίσιμη γλώσσα

$$
\begin{array}{l}
> ML \xrightarrow{Y} NR \\
\qquad\;\; | \xrightarrow{N} YR
\end{array}
$$

Σχήμα 1.12: μηχανή Turing που αποφασίζει την συμπληρωματική γλώσσα

πηγαίνει αριστερά μέχρι να συναντήσει ένα a και τότε τερματίζει. Εάν δεν βρεθεί κανένα a, η μηχανή κρεμάει οπότε δεν τερματίζει. Έτσι η L είναι ακριβώς το σύνολο των συμβολοσειρών $w \in \Sigma_0^*$ για τα οποία η M τερματίζει με συμβολοσειρά εισόδου w, και συνεπώς η M αποδέχεται την L. $\diamond$

Ποια, όμως είναι η σχέση μεταξύ Turing αποφασίσιμης και Turing αποδεκτής γλώσσας; Την απάντηση δίνουν τα δύο επόμενα θεωρήματα που θα σχολιάσουμε στην συνέχεια.

Θεώρημα 1.1 : Εάν μια γλώσσα L είναι Turing αποφασίσιμη τότε είναι και Turing αποδεκτή.

Απόδειξη: Πράγματι, η L γίνεται αποδεκτή από την μηχανή Turing M' του Σχήματος 1.11. Αυτή η μηχανή αρχικά λειτουργεί ως M και αποφασίζει την L. Στην συνέχεια η κεφαλή κινείται μια θέση αριστερά, (μηχανή L) για να εξετάσει τι απάντηση έδωσε η M. Εάν η M έχει δώσει απάντηση Y, τότε η M' κινεί την κεφαλή μια θέση δεξιά και σταματά. Αντίθετα, εάν η απάντηση είναι N, τότε η M' πέφτει σε βρόχο (επανεγγράφοντας συνεχώς στην ίδια θέση το N), δηλαδή, δεν σταματά. $\blacksquare$

Θεώρημα 1.2 : Εάν η L είναι μια Turing αποφασίσιμη γλώσσα, τότε η συμπληρωματική της $\overline{L} = \{w \text{ με } w \notin L\}$ είναι επίσης Turing αποφασίσιμη γλώσσα.

Απόδειξη: Εάν η L αποφασίζεται από την μηχανή Turing M, τότε η $\overline{L}$ αποφασίζεται από την μηχανή Turing M' του Σχήματος 1.12. Πράγματι η μηχανή αρχικά λειτουργεί ως M μέχρι να σταματήσει, έχοντας αφήσει επάνω στην ταινία την απάντηση Y ή N. Στην συνέχεια κινεί την κεφαλή αριστερά, και ανάλογα την απάντηση που βρίσκει εκεί, την αλλάζει από Y σε N και από N σε Y. Μετά κινεί την κεφαλή στη δεξιά κενή θέση και σταματά. $\blacksquare$

Δυστυχώς τα αντίστροφα ερωτήματα “είναι κάθε Turing αποδεκτή γλώσσα και Turing αποφασίσιμη;" και "είναι Turing αποδεκτή η συμπληρωματική γλώσσα κάθε Turing αποδεκτής γλώσσας;" έχουν, όπως θα δειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο, αρνητική απάντηση.

1.4 Επεκτάσεις της μηχανής Turing

Η απλότητα του μοντέλου της μηχανής Turing έχει κάνει πολλούς ερευνητές να νομίσουν ότι θα μπορούσαν να εφεύρουν παραλλαγές του με μεγαλύτερες ικανότητες υπολογισμών ή αναγνώρισης γλωσσών. Έτσι μέχρι σήμερα έχουν διερευνηθεί αρκετές επεκτάσεις του κλασικού μας μοντέλου. Πριν αναφέρουμε τις κυριότερες από αυτές, ας δούμε μια μικρή παραλλαγή του δικού μας κλασικού μοντέλου. Όπως αναφέραμε και στην ενότητα ορισμού της κλασικής μηχανής Turing, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μετάπτωσης δ' του νέου μοντέλου είναι τέτοια που επιτρέπει στην μηχανή Turing σε ένα μόνο βήμα και να γράψει ένα σύμβολο στην ταινία και να κινηθεί μια θέση αριστερά, (L),ή δεξιά, (R), ή να παραμείνει στην θέση της, (S), δηλαδή

$$\delta' : K \times \Sigma \mapsto K \times \Sigma \times \{L, R, S\}.$$

Κάνει αυτή η αλλαγή την μηχανή Turing ισχυρότερη; π.χ., την κάνει να αναγνωρίζει πρόσθετες γλώσσες σε σχέση με την κλασική μηχανή Turing ; Η απάντηση είναι "όχι", διότι εύκολα μπορεί να μετατραπεί μια τέτοια μηχανή Turing σε κλασική. Πράγματι, ένα βήμα στο οποίο δεν κινείται η κεφαλή (δηλαδή, όταν $\delta'(q, a) = (p, b, S),\ q, p \in K,\ a, b \in \Sigma)$), αντιστοιχεί σε ένα βήμα $\delta(q, a) = (p, b),\ q, p \in K,\ a, b \in \Sigma)$ της κλασικής, ενώ ένα βήμα στο οποίο κινείται και η κεφαλή (δηλαδή, όταν $\delta'(q, a) = (p, b, X),\ q, p \in K,\ a, b \in \Sigma,\ X \in \{L, R\})$), αντιστοιχεί σε δύο βήματα της κλασικής, ένα για να γράψει στην ταινία b στην θέση του a, και ένα μετά για να κινηθεί αριστερά ή δεξιά, μέσω μιας κατάστασης q' "ενδιάμεσης" των καταστάσεων q και p (αφήνουμε στον αναγνώστη να επεξεργαστεί τις λεπτομέρειες σαν άσκηση αμέσως παρακάτω).

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.6 : Έστω η μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta', s, h)$, όπου

$$\begin{aligned} K &= \{q_0, q_1, h\} \\ \Sigma &= \{a, b, \#\} \\ s &= q_0 \end{aligned}$$

και συνάρτηση δ' της μορφής που αναφέραμε παραπάνω που δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα καταστάσεων: