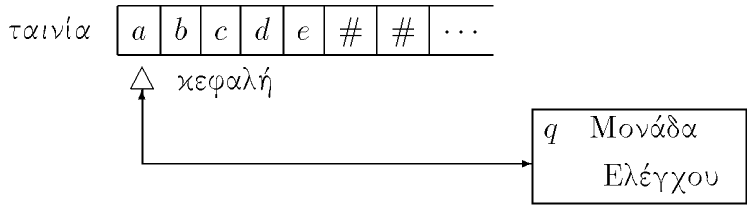


Σχήμα 1.1: Σχηματικό διάγραμμα μηχανής Turing

1.1 Ορισμός της μηχανής Turing

Παρόλο που αναφερόμαστε στην μηχανή Turing, ουσιαστικά πρόκειται για μία ολόκληρη κλάση από μηχανές Turing με φαινομενικά μικρές ή μεγάλες διαφορές μεταξύ τους, που όμως όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Ήταν το 1936 όταν ο Άγγλος μαθηματικός **Alan Turing** (1912-1954), εισήγαγε το ομώνυμο μοντέλο σε μια προσπάθεια τυποποίησης της έννοιας της *αποτελεσματικής διεργασίας* ή ισοδύναμα του *αλγόριθμου* ή και αυτής του *υπολογιστή γενικού σκοπού.*

Ένα τυπικό μοντέλο για την αποτελεσματική διεργασία πρέπει να έχει ορισμένες βασικές ιδιότητες. Πρώτα, μια διεργασία πρέπει να έχει πεπερασμένη περιγραφή, δηλαδή να ορίζεται με ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων υπολογισμού. Δεύτερο, τα βήματα πρέπει να είναι διακριτά μεταξύ τους και το καθένα να μπορεί να εκτελείται μηχανιστικά σε πεπερασμένο χρόνο, ώστε να έχουμε τελικά ένα αποτέλεσμα, απ' όπου και ο όρος αποτελεσματική διεργασία. Κατά συνέπεια, ένα τέτοιο μοντέλο δεν πρέπει να απέχει πολύ από αυτά των πεπερασμένων αυτομάτων που είδαμε στην σχετική υποενότητα. Πράγματι μια μηχανή Turing αποτελείται από μια μονάδα ελέγχου, μια ταινία και μια κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής (Σχήμα 1.1). Η μονάδα ελέγχου είναι ουσιαστικά ένα πεπερασμένο αυτόματο παρόμοιο με αυτό των αυτομάτων στοίβας, με μόνη διαφορά ότι διαβάζει και γράφει σύμβολα από την ταινία. Η ταινία είναι χωρισμένη σε θέσεις, έχει άπειρο πλήθος θέσεων, με κάθε θέση να μπορεί να περιέχει ένα σύμβολο από κάποιο αλφάβητο. Με άλλα λόγια, η ταινία χρησιμεύει σαν περιφερειακή μονάδα για είσοδο και έξοδο δεδομένων.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο μηχανής Turing που φαίνεται στο Σχήμα 1.1, η ταινία έχει αριστερό άκρο αλλά επεκτείνεται απεριόριστα προς τα δεξιά (θα δούμε παραλλαγή αυτού του μοντέλου με ταινία απεριόριστη και στα δύο άκρα). Η κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής σαρώνει κάθε δεδομένη χρονική στιγμή μία θέση της ταινίας και έχει την δυνατότητα να διαβάσει το σύμβολο που είναι στη θέση που σαρώνει, και να γράψει στη ίδια θέση της ταινίας ένα σύμβολο ή να κινηθεί κατά μια θέση αριστερά ή δεξιά στην ταινία. Αναλυτικότερα, η μηχανή Turing σε κάθε βήμα λειτουργίας της πραγματοποιεί τρεις ενέργειες που εξαρτώνται από την παρούσα κατάσταση της μονάδας ελέγχου και το συγκεκριμένο σύμβολο της ταινίας που είναι κάτω από την κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής:

1. Διάβασε το σύμβολο από τη θέση της ταινίας στην οποία είναι η κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής (σύμβολο εισόδου).
2. Με βάση την παρούσα κατάσταση της μονάδας ελέγχου και το σύμβολο εισόδου πήγαινε σε μια νέα κατάσταση.
3. Είτε :

   (α) Γράψε ένα σύμβολο στην ίδια θέση της ταινίας, αντικαθιστώντας αυτό που διάβασες, ή

   (β) μετακίνησε την κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής κατά μια θέση αριστερά ή δεξιά.

Όπως και στην περίπτωση της ταινίας, έτσι και στην περίπτωση της παραπάνω περιγραφής του βήματος λειτουργίας της μηχανής Turing, χρησιμοποιούμε μια συγκεκριμένη έκδοση μηχανής Turing, την οποία από εδώ και πέρα θα αποκαλούμε **κλασική μηχανή Turing** . Μια παραλλαγή της ενοποιεί τα (α) και(β) της 3ης ενέργειας, δηλαδή στη: "Γράψε ένα σύμβολο στην ίδια θέση της ταινίας, αντικαθιστώντας αυτό που διάβασες και μετά μετακίνησε την κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής κατά μια θέση της ταινίας αριστερά ή δεξιά". Θα σας δοθεί στην υποενότητα 1.4 άσκηση να μετατρέψετε μια τέτοια μηχανή Turing στην ισοδύναμή της κλασική μηχανή Turing. Επιστρέφουμε στο κύριο θέμα μας δίνοντας περισσότερες πληροφορίες για τον τρόπο που χρησιμοποιείται το μοντέλο μας.

Μια μηχανή Turing τροφοδοτείται με είσοδο τοποθετώντας τη συμβολοσειρά εισόδου μήκους n συμβόλων στις n αριστερότερες θέσεις της ταινίας. Οι υπόλοιπες θέσεις της ταινίας είναι αρχικά κενές, δηλαδή κάθε κενή θέση περιέχει το κενό σύμβολο του αλφαβήτου που εφεξής θα το συμβολίζουμε με #. Επειδή η μηχανή Turing μπορεί να γράφει στην ταινία της, μπορεί να αφήσει στο τέλος ενός υπολογισμού μια απάντηση, την έξοδό της, στην ταινία. Η ταινία είναι απείρου μήκους με την έννοια ότι η μηχανή Turing έχει στην διάθεσή της όσες θέσεις θα της χρειαστούν σε έναν υπολογισμό. Το τέλος ενός υπολογισμού σηματοδοτείται με το να μεταπέσει η μηχανή Turing στη λεγόμενη **κατάσταση τερματισμού**, που θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι είναι η ίδια για όλες τις μηχανές Turing και θα τη συμβολίζουμε εφεξής με το σύμβολο h. Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε τα διακεκριμένα σύμβολα L και R για να παραστήσουμε, αντίστοιχα, μετακίνηση κατά μια θέση της κεφαλής προς τα αριστερά και δεξιά. Υποθέτουμε ότι αυτά τα δυο σύμβολα δεν είναι μέλη του εκάστοτε αλφαβήτου που χρησιμοποιούμε.

Ο τυπικός ορισμός μιας μηχανής Turing είναι ως εξής:

Ορισμός 1.1 : Μια μηχανή Turing M είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \delta, s, h)$, όπου

K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**.

Σ είναι ένα **αλφάβητο**, το οποίο περιέχει και το κενό σύμβολο #, αλλά δεν περιέχει τα σύμβολα L και R.

δ είναι η **συνάρτηση μετάπτωσης** από το $K \times \Sigma$ στο $K \times (\Sigma \cup \{L, R\})$.

$s \in K$ είναι η **αρχική κατάσταση**.

h είναι η **κατάσταση τερματισμού**, με $h \in K$ και $\delta(h, \sigma) = (h, \sigma) \ \ \forall \sigma \in \Sigma$.

Η συνάρτηση μετάπτωσης δ είναι αυτή που καθορίζει την λειτουργία της μηχανή Turing M. Πράγματι, εάν $q \in K, a \in \Sigma$ και $\delta(q, a) = (p, b)$ τότε η M, όταν βρίσκεται στη κατάσταση q και διαβάζει το σύμβολο a, θα μεταπέσει στη κατάσταση p και (1) εάν b είναι σύμβολο του Σ, τότε γράφει το b στην θέση του a ή (2) εάν b είναι ίσο με L ή R, τότε μετακινεί την κεφαλή μια θέση αριστερά ή δεξιά, αντίστοιχα.

Δεδομένου ότι η δ είναι συνάρτηση, η λειτουργία της M είναι **ντετερμινιστική**, δηλαδή από μια "κατάσταση" (q, a) η M έχει δυνατή μόνο μια επόμενη "κατάσταση" (p, b). Η M θα "σταματήσει" μόνο όταν μεταπέσει στη κατάσταση τερματισμού, απ' όπου, με βάση τον ορισμό μας "κολλάει" στην κατάσταση h. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η μηχανή Turing **τερματίζει**, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση λέμε ότι **δεν** τερματίζει, αλλά ότι συνεχίζει να δουλεύει κάνοντας χρήσιμους υπολογισμούς, ή ότι **πέφτει σε βρόχο**. Σημειώστε ότι είναι δυνατόν, με βάση τον ορισμό μας, μια μηχανή Turing να "κολλάει" σε μια κατάσταση q διαφορετική της h (δηλαδή να ισχύει $\delta(q, \sigma) = (q, \sigma)$ $\forall \sigma \in \Sigma$), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τερματίζει, απλά έχει πέσει σε βρόχο.

Εάν η M επιχειρήσει να μετακινηθεί πιο αριστερά από το άκρο της ταινίας, τότε λέμε ότι η μηχανή Turing **κρεμάει**, δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή ο τυπικός ορισμός μας δεν προσδιορίζει τι θα επακολουθήσει. Η περίπτωση κρεμάσματος **δεν** θεωρείται τερματισμός της μηχανής Turing αλλά αντίθετα ασταμάτητη λειτουργία στο ίδιο σημείο που είναι ισοδύναμο με το να έχει πέσει σε βρόχο.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεδομένου ότι για την κατάσταση τερματισμού h ισχύει $\delta(h, \sigma) = (h, \sigma)$ για κάθε $\sigma \in \Sigma$, δεν είναι απαραίτητο να το αναφέρουμε από εδώ και πέρα όταν δίνουμε την συνάρτηση δ μιας μηχανής Turing με την βοήθεια του λεγόμενου **πίνακα καταστάσεων**, διαστάσεων $(|K| - 1) \times |\Sigma|$. Σε κάθε θέση $i \times j$ του πίνακα δίνεται η τιμή της $\delta(q_i, \sigma_j) = (p, b)$. Μια πρόσθετη πρώτη στήλη και μια πρόσθετη πρώτη γραμμή καταγράφουν αντίστοιχα τις καταστάσεις $q_i \in (K - \{h\})$ και τα σύμβολα $\sigma \in \Sigma$.

Παράδειγμα 1.1 : Θεωρείστε την μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$, όπου

$$\begin{aligned} K &= \{q_0, q_1, h\} \\ \Sigma &= \{a, b, \#\} \\ s &= q_0 \end{aligned}$$

και η δ δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα καταστάσεων:

	a	b	$\#$
q_0	(q_1, b)	(q_1, a)	$(h, \#)$
q_1	(q_0, R)	(q_0, R)	(q_0, R)

Όταν η M ξεκινά από την αρχική της κατάσταση q_0, σαρώνει την ταινία με την κεφαλή της προς τα δεξιά, αλλάζοντας όλα τα a σε b και όλα τα b σε a καθώς προχωρεί, μέχρι να βρει μια θέση της ταινίας η οποία περιέχει $\#$, οπότε και σταματάει. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι η M ξεκινά με την κεφαλή της στην αριστερή άκρη της ταινίας να σαρώνει τη συμβολοσειρά $w = aabb$, η οποία ακολουθείται από $\#$. Τότε η M θα μεταβεί εμπρός-πίσω μεταξύ των καταστάσεων q_0 και q_1 τέσσερις φορές, εναλλάξ αλλάζοντας τα a σε b, τα b σε a και μετακινώντας την κεφαλή δεξιά. Στη συνέχεια, η M θα βρεθεί στη κατάσταση q_0 να σαρώνει $\#$ και σύμφωνα με τον πίνακα θα τερματίσει. Παρατηρείστε ότι η τιμή της $\delta(q_1, \#) = (q_0, R)$ είναι άσχετη, αφού η M δεν πρόκειται ποτέ να βρεθεί στη κατάσταση q_1 και να σαρώνει ένα $\#$ εάν έχει ξεκινήσει από τη θέση q_0. Ωστόσο, πρέπει να δώσουμε κάποια τιμή στο $\delta(q_1, \#)$, αφού η δ πρέπει να είναι συνάρτηση (εάν είμαστε βέβαιοι ότι η μηχανή δεν θα αντιμετωπίσει κάποιο συνδυασμό (q, a) τότε αφήνουμε κενό ή βάζουμε "παύλες" στην αντίστοιχη θέση του πίνακα). Παρατηρήστε επίσης ότι η M έχει την ίδια συμπεριφορά, (δηλαδή, ξεκινώντας με την κεφαλή σε μη κενή θέση, σαρώνει την ταινία προς τα δεξιά αλλάζοντας όλα τα a σε b και όλα τα b σε a πριν σταματήσει στην επόμενη κενή θέση), ακόμη και εάν οσαδήποτε στη σειρά a ή b είναι οπουδήποτε στην ταινία ακολουθούμενα από κενό. $\diamond$

Παράδειγμα 1.2 : Θεωρείστε την μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$, όπου

$$\begin{aligned} K &= \{q_0, h\} \\ \Sigma &= \{a, b, \#\} \\ s &= q_0 \end{aligned}$$

και η δ δίνεται από τον πίνακα:

	a	b	$\#$
q_0	(q_0, L)	(q_0, L)	$(h, \#)$

Αυτή η μηχανή σαρώνει την ταινία προς τα αριστερά, χωρίς να μεταβάλει τα a και τα b, μέχρι να συναντήσει $\#$ και μετά τερματίζει. Εάν όμως κάθε θέση της ταινίας από την κεφαλή μέχρι το αριστερό άκρο περιέχει μόνο a ή b, τότε η M θα μετακινήσει την κεφαλή της πέρα από το αριστερό άκρο της ταινίας και θα κρεμάσει. $\diamond$

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.1 : Έστω η μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$, όπου

$$\begin{aligned} K &= \{q_0, q_1, h\} \\ \Sigma &= \{a, \#\} \\ s &= q_0 \end{aligned}$$

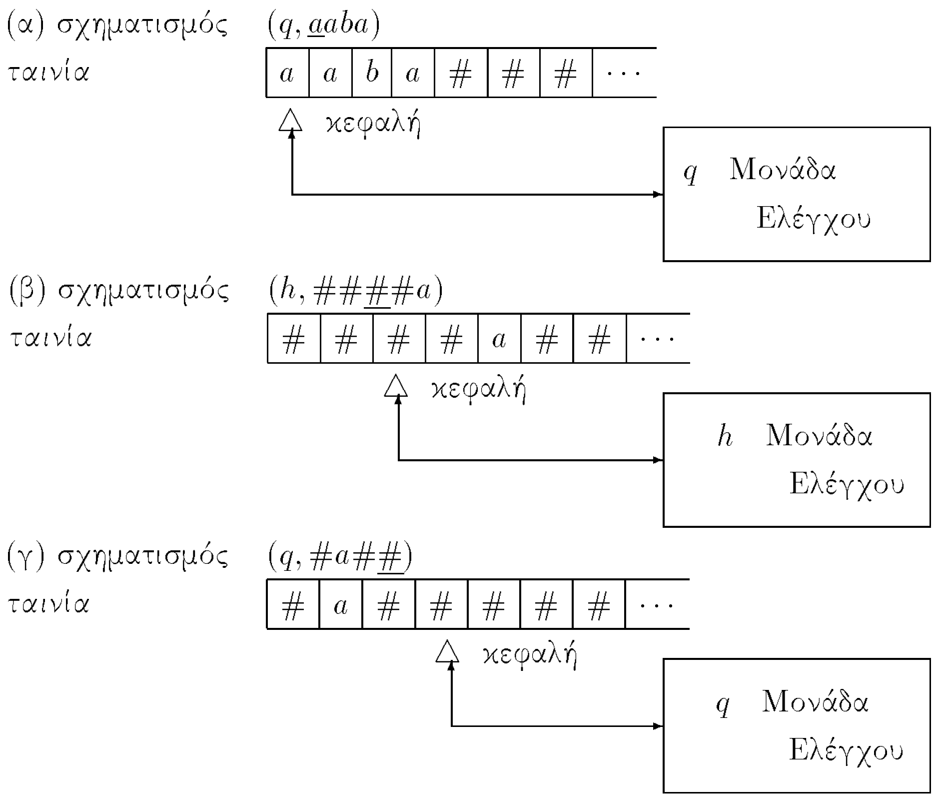
και με συνάρτηση δ που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

	a	$\#$
q_0	$(q_1, \#)$	$(h, \#)$
q_1	(q_0, a)	(q_0, R)

Περιγράψτε τι κάνει η M γενικά, όπως και πιο συγκεκριμένα όταν στην αρχή της λειτουργίας της η κεφαλή είναι στο αριστερό άκρο της ταινίας η οποία έχει στις τέσσερες πρώτες θέσεις την συμβολοσειρά $aaaa$ ακολουθούμενη από $\#$. $\diamond$

Θα ορίσουμε τώρα πιο τυπικά τη λειτουργία μιας μηχανής Turing, ώστε να μπορούμε να περιγράφουμε με ακρίβεια διαδοχικά βήματα της. Πράγματι, για να προσδιορίσουμε την συνολική κατάσταση του υπολογισμού μιας μηχανής Turing, χρειάζεται να προσδιορίσουμε την κατάσταση της μονάδας ελέγχου, τα περιεχόμενα της ταινίας και την θέση της ταινίας που βρίσκεται η κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής (που στο εξής θα λέμε απλά **θέση κεφαλής**). Εφόσον όλη η ταινία εκτός από ένα πεπερασμένο αρχικό τμήμα της θα είναι κενό, τα περιεχόμενα της ταινίας μπορούν να προσδιοριστούν με μια συμβολοσειρά. Για να παραστήσουμε επίσης την θέση της κεφαλής, χωρίζουμε αυτήν τη συμβολοσειρά με κόμματα σε τρία τμήματα: τη συμβολοσειρά, (ενδεχομένως κενή e), στα αριστερά της θέσης της κεφαλής, το σύμβολο στη θέση της κεφαλής και τη συμβολοσειρά, (ενδεχομένως κενή e), στα δεξιά της θέσης της κεφαλής. Επιπλέον, για να εξασφαλίσουμε ότι ποτέ δύο τριάδες (συμβολοσειρά, σύμβολο, συμβολοσειρά) δεν αντιστοιχούν στον ίδιο συνδυασμό θέσης κεφαλής και περιεχομένων ταινίας, επιμένουμε ότι η τελευταία συμβολοσειρά δεν θα τελειώνει με το κενό σύμβολο (δηλαδή, όλες οι θέσεις στα δεξιά της τελευταίας μη κενής θέσης που παριστάνεται σαφώς, υποτίθεται ότι περιέχουν μόνο κενά). Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω τριάδα χωρίς κόμματα, οπότε υπογραμμίζουμε το σύμβολο της θέσης της κεφαλής. Για παράδειγμα αντί w, a, u γράφουμε $w\underline{a}u$. Από εδώ και στο εξής θα καλούμε την τριάδα αυτή, ή την ισοδύναμή της συμβολοσειρά με την υπογράμμιση, **κατάσταση της ταινίας**.

Αυτή η θεώρηση μας οδηγεί στους παρακάτω ορισμούς.



Σχήμα 1.2: Παραδείγματα σχηματισμών μηχανών Turing

Ορισμός 1.2 : Ένας **σχηματισμός** μιας μηχανής Turing $M = (K, \Sigma, \delta, \sigma, h)$ είναι μέλος του Καρτεσιανού γινομένου

$$K \times \Sigma^* \times \Sigma \times (\Sigma^*(\Sigma - \#) \cup \{e\}).$$

Ένας σχηματισμός που έχει συνιστώσα κατάστασης την h θα ονομάζεται **σχηματισμός τερματισμού.**

Για παράδειγμα, οι $(q, e, a, aba), (h, \#\#, \#, \#a)$ και $(q, \#a\#, \#, e)$ είναι σχηματισμοί (Σχήμα 1.2), αλλά η $(q, baa, a, bc\#)$ δεν είναι. Οι ταινίες και οι θέσεις των κεφαλών παριστάνονται επίσης σαν $\underline{a}aba$, $\#\#\underline{\#}\#a$, $\#a\#\underline{\#}$. Χρησιμοποιώντας αυτήν τη σύμβαση οι τρεις παραπάνω σχηματισμοί γράφονται ισοδύναμα ως $(q, \underline{a}aba)$, $(h, \#\#\underline{\#}\#a)$ και $(q, \#a\#\underline{\#})$.

Μεταξύ δύο σχηματισμών ορίζουμε την σχέση **"παράγει σε ένα βήμα"** ως εξής:

Ορισμός 1.3 : Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, h)$ μια μηχανή Turing και έστω $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1)$ και $(q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$ σχηματισμοί της M. Τότε λέμε ότι ο σχηματισμός $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1)$ **παράγει σε ένα βήμα** τον σχηματισμό $(q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$ και γράφουμε αυτό ως

$$(q_1, w_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M (q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$$

εάν και μόνο εάν , για κάποιο $b \in \Sigma \cup \{L, R\}$, $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ και είτε

1. $b \in \Sigma, w_1 = w_2, u_1 = u_2$ και $a_2 = b$
   είτε
2. $b = L, w_1 = w_2a_2$, και είτε

   (α) $u_2 = a_1u_1$, εάν $a_1 \neq \#$ ή $u_1 \neq e$, ή
   (β) $u_2 = e$, εάν $a_1 = \#$ και $u_1 = e$,

   ή

3. $b = R, w_2 = w_1a_1$, και είτε

   (α) $u_1 = a_2u_2$, ή
   (β) $u_1 = u_2 = e$ και $a_2 = \#$.

Στην περίπτωση 1, η M γράφει ένα σύμβολο χωρίς να κινήσει την κεφαλή. Στην περίπτωση 2, η M μετακινεί την κεφαλή μια θέση προς τα αριστερά. Εάν κινούμενη προς τα αριστερά, φεύγει από κενή συμβολοσειρά, τότε το κενό σύμβολο στη θέση που μόλις σαρώθηκε εξαφανίζεται από τον σχηματισμό. Στην περίπτωση 3, η M κινεί την κεφαλή κατά μια θέση προς τα δεξιά. Εάν μετακινηθεί πάνω σε κενή συμβολοσειρά, ένα νέο κενό σύμβολο εμφανίζεται στον σχηματισμό σαν το νέο σύμβολο που σαρώνεται.

Παράδειγμα 1.3 : Για να απεικονίσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις, έστω $w, u \in \Sigma^*$, όπου το u δεν τελειώνει με $\#$, και έστω $a, b \in \Sigma$.

- Περίπτωση 1. $\delta(q_1, a) = (q_2, b)$

  Παράδειγμα: $(q_1, w\underline{a}u) \vdash_M (q_2, w\underline{b}u)$

- Περίπτωση 2. $\delta(q_1, a) = (q_2, L)$

  Παράδειγμα για το (α): $(q_1, wb\underline{a}u) \vdash_M (q_2, w\underline{b}au)$
  Παράδειγμα για το (β): $(q_1, wb\underline{\#}) \vdash (q_2, w\underline{b})$

- Περίπτωση 3. $\delta(q_1, a) = (q_2, R)$

  Παράδειγμα για το (α): $(q_1, w\underline{a}bu) \vdash_M (q_2, wa\underline{b}u)$
  Παράδειγμα για το (β): $(q_1, w\underline{a}) \vdash_M (q_2, wa\underline{\#})$

Παρατηρείστε ότι αν $b = L$ και $w_1 = e$, τότε το (q_1, w_1, a_1, u_1) δεν δίνει σχηματισμό, αφού δεν υπάρχουν $w_2 \in \Sigma^*$ και $a_2 \in \Sigma$ τέτοια ώστε $w_1 = w_2 a_2$. Ένας τέτοιος σχηματισμός θα ονομάζεται **σχηματισμός κρεμάσματος**. Από την άλλη μεριά, κάθε σχηματισμός που δεν είναι σχηματισμός τερματισμού ή κρεμάσματος, παράγει σε ένα βήμα ακριβώς έναν σχηματισμό. $\diamond$

Ορισμός 1.4 : Για κάθε μηχανή Turing M, έστω ότι $\vdash_M^*$ είναι η ανακλαστική, μεταβατική κλειστότητα του $\vdash_M$. Λέμε ότι ο σχηματισμός C_1 **παράγει** τον σχηματισμό C_2 εάν $C_1 \vdash_M^* C_2$. Ένας **υπολογισμός** της M είναι μια ακολουθία σχηματισμών $C_0, C_1, \ldots, C_n$ για κάποιο $n \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M C_2 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n.$$

Λέμε ότι ο υπολογισμός είναι **μήκους** n ή ότι έχει n **βήματα** και γράφουμε $C_0 \vdash_M^n C_n$.

Παράδειγμα 1.4 : Έστω η μηχανή Turing M που περιγράφεται στην άσκηση 1.1. Εάν η M ξεκινήσει με αρχικό σχηματισμό $(q_0, \underline{a}aaa)$, τότε ο υπολογισμός έχει ως εξής:

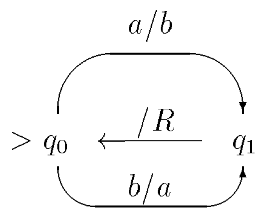
$$\begin{aligned}
(q_0, \underline{a}aaa) &\vdash_M (q_1, \underline{\#}aa\alpha) \\
&\vdash_M (q_0, \#\underline{a}aa) \\
&\vdash_M (q_1, \#\underline{\#}aa) \\
&\vdash_M (q_0, \#\#\underline{a}a) \\
&\vdash_M (q_1, \#\#\underline{\#}a) \\
&\vdash_M (q_0, \#\#\#\underline{a}) \\
&\vdash_M (q_1, \#\#\#\underline{\#}) \\
&\vdash_M (q_0, \#\#\#\#\underline{\#}) \\
&\vdash_M (h, \#\#\#\#\underline{\#})
\end{aligned}$$

Αυτός ο υπολογισμός έχει εννέα βήματα.

$\diamond$

Παράδειγμα 1.5 : Θεωρήστε την μηχανή Turing του παραδείγματος 1.2. Από τον σχηματισμό $(q_0, aa\underline{b})$ έχουμε τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
(q_0, aa\underline{b}) &\vdash_M (q_0, a\underline{a}b) \\
&\vdash_M (q_0, \underline{a}ab)
\end{aligned}$$



Σχήμα 1.3: Διάγραμμα καταστάσεων της μηχανής Turing του παραδείγματος 1.1

Αυτός ο τελευταίος σχηματισμός (ο οποίος μπορεί να γραφεί πλήρως ως (q_0, e, a, ab)) είναι σχηματισμός κρεμάσματος.

$\diamond$

1.2 Σύνθεση μηχανών Turing

Στην προηγούμενη ενότητα δώσαμε παραδείγματα μηχανών Turing με την χρήση του **πίνακα καταστάσεων**. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να δώσουμε μια γραφική παράσταση μιας μηχανής Turing με την χρήση του λεγόμενου **διαγράμματος καταστάσεων**, παρόμοιου με αυτό που χρησιμοποιείται στα πεπερασμένα αυτόματα. Για παράδειγμα στο Σχήμα 1.3, δίνουμε το διάγραμμα καταστάσεων της μηχανής Turing του παραδείγματος 1.1. Ουσιαστικά το διάγραμμα καταστάσεων μιας μηχανής Turing είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος με ονοματισμένους κόμβους τις καταστάσεις της μηχανής Turing . Δυο κόμβοι q και p συνδέονται με μια κατευθυνόμενη ακμή από τον κόμβο q στον κόμβο p εάν υπάρχει μετάπτωση της μορφής $\delta(q, a) = (p, b), a \in \Sigma, q, p \in K$, και $b \in \Sigma \cup \{L, R\}$. Η ακμή επίσης επιγράφεται με το ζεύγος a/b. Η αρχική κατάσταση σημειώνεται με $>$. Σε περίπτωση που από τον κόμβο q στον κόμβο p υπάρχουν περισσότερες από μια ακμές με επιγραφές με το ίδιο b, τότε μπορούμε συνενώσουμε τις ακμές αυτές σε μια με επιγραφή $\sigma_1, \sigma_2, \ldots /b$, όπου τα σ_i είναι τα πρώτα μέλη των ζευγών $\sigma_1/b, \sigma_2/b, \ldots$ (εάν αυτή η μετάπτωση γίνεται για κάθε $\sigma \in \Sigma$ τότε αρκεί μια ακμή με επιγραφή Σ/b ή ισοδύναμα $/b$.

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι και στις δυο μορφές αναπαράστασης μιας μηχανής Turing για να κατανοήσει κανείς το τι κάνει αυτή θα πρέπει να ακολουθήσει νοερά διάφορα "μονοπάτια" μετάπτωσης καταστάσεων, πράγμα που γίνεται πολύπλοκο και δυσνόητο ακόμη και για μικρό αριθμό καταστάσεων. μια απλούστερη μέθοδος είναι να συνθέσουμε μια μηχανή Turing από άλλες απλούστερες, όμοια με την σύνθεση ενός προγράμματος από απλούστερα προγράμματα ή ρουτίνες από μια βιβλιοθήκη. Στην περίπτωσή μας, ξεκινάμε την σύνθεση μας με τις λεγόμενες **βασικές** μηχανές Turing και την λεγόμενη **συνάρτηση ροής**. Οι βασικές μηχανές Turing είναι οι **μηχανές εγγραφής συμβόλου**, M_σ, μια για κάθε σύμβολο σ του αλφάβητου Σ,