Κεφάλαιο 3

ΓΛΩΣΣΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΣΤΟΙΒΑΣ

3.1 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΣΥΜΦΡΑΖΟΜΕΝΩΝ

Ορισμός: Μια **γραμματική ανεξάρτητη συμφραζομένων** (ή **ΓρΑΣ**) είναι μια τετράδα $G = (V, T, R, S)$, όπου:

- V είναι το αλφάβητο των **μεταβλητών**.
- T είναι το αλφάβητο των **τερματικών**.
- $V \cap T = \varnothing$.
- R είναι πεπερασμένο σύνολο **κανόνων**, όπου κάθε κανόνας είναι της μορφής $A \to a$, για $A \in V$ μεταβλητή και $a \in (V \cup T)^*$ λέξη μεταβλητών - τερματικών.
- $S \in V$ η **αρχική μεταβλητή**.

Συμβολισμοί:

- (Συνήθως) με κεφαλαία γράμματα $A, B, C, \ldots$ συμβολίζονται οι μεταβλητές και με S **πάντα** η αρχική μεταβλητή.
- Με μικρά ελληνικά γράμματα α, β, γ, ... συμβολίζονται οι λέξεις του $(V \cup T)^*$.
- Για $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$, γράφουμε $\alpha \Rightarrow_G \beta$ (ή $\alpha \Rightarrow \beta$) αν το β μπορεί να προκύψει από το α με αντικατάσταση κάποιας μεταβλητής, που εμφανίζεται στο αριστερό μέρος ενός κανόνα. Έτσι, $\delta A \zeta \Rightarrow \delta \gamma \zeta$, αν $A \to \gamma$, οπότε λέμε ότι η $\delta A \zeta$ **παράγει απευθείας** (ή **σε ένα βήμα**) την $\delta \gamma \zeta$ (μέσω του κανόνα $A \to \gamma$).
- $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$ (ή $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$) αν το α **παράγει** το β **σε ένα η περισσότερα βήματα**, δηλαδή, αν υπάρχουν $\alpha_j \in (V \cup T)^+, j = 1, \ldots, k$, τέτοια ώστε $\alpha = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_k = b$, οπότε λέμε ότι το **μήκος της παραγωγής** του β από το α είναι k.

- Οι κανόνες της γραμματικής εκφράζονται συνοπτικά ως $A \to \alpha_1|\alpha_2|\cdots|\alpha_n$, όπου "|" = "ή".

Ορισμός: Έστω $G = (V, T, R, S)$ μια ΓρΑΣ. Η γλώσσα $L(G)$, που παράγεται από την G, είναι το σύνολο όλων των λέξεων τερματικών, που παράγονται από την αρχική μεταβλητή S, δηλαδή:

$$L(G) = \{w \in T^* : S \Rightarrow w\}.$$

Μια γλώσσα L ονομάζεται **γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων** (ή **ΓΛΑΣ**) αν υπάρχει μια ΓρΑΣ G τέτοια ώστε $L = L(G)$.

Παράδειγμα 1: Έστω η ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$, όπου:

$$\begin{aligned} V &= \{S, A, N, V, P\}, \\ T &= \{\text{γάτα, πίτα, μαύρη, μεγάλη, έφαγε}\}, \\ R &= \{P \to N|AP, S \to PVP, A \to \text{ μάυρη}|\text{μεγάλη}, N \to \text{ γάτα}|\text{πίτα}, V \to \text{ έφαγε}\}. \end{aligned}$$

Τότε, η G είναι η γραμματική ενός τμήματος της ελληνικής γλώσσας (A = επίθετο, N = ουσιαστικό, V = ρήμα, P = πρόταση). Παραδείγματα συμβολοσειρών της $L(G)$ είναι τα εξής:

1. 'γάτα έφαγε πίτα,'
2. 'μαύρη γάτα έφαγε μεγάλη πίτα,'
3. 'μαύρη πίτα έφαγε μεγάλη γάτα.'

Η (1) παράγεται ως εξής: $S \Rightarrow PVP \Rightarrow P$ έφαγε $P \Rightarrow N$ έφαγε $N \Rightarrow$ γάτα έφαγε $P \Rightarrow$ (1). Παρόμοια κι οι (2) και (3).

Παράδειγμα 2: Έστω η ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$, όπου:

$$\begin{aligned} V &= \{S\}, \\ T &= \{+, *, (,), x, y\}, \\ R &= \{S \to S + S|S * S|(S)|x|y\}. \end{aligned}$$

Η γλώσσα αυτή παράγει όλες τις σωστές αλγεβρικές εκφράσεις με προσθέσεις (+) και πολλαπλασιασμούς (*). Π.χ., το $x + x * y$ παράγεται ως εξής:

$$S \Rightarrow S + S \Rightarrow x + S \Rightarrow x + S * S \Rightarrow x + x * S \Rightarrow x + x * y.$$

Παράδειγμα 3: Έστω η ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$, όπου:

$$\begin{aligned} V &= \{S\}, \quad T = \{a, b\}, \\ R &= \{S \to aS|\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Ασκώντας τον πρώτο κανόνα n φορές στην S και μετά το δεύτερο κανόνα, παίρνουμε:

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow a^3S \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^nS \Rightarrow a^n.$$

Το ίδιο θα προέκυπτε και με οποιαδήποτε άλλη παραγωγή. Επομένως, $L(G) = a^*$.

Παρατήρηση: Η ίδια γλώσσα a^* παράγεται κι από τους κανόνες:

$$S \to SS|a|\varepsilon.$$

Παράδειγμα 4: Έστω η ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$, όπου:

$$\begin{aligned} V &= \{S\},\ T = \{a, b\}, \\ R &= \{S \to aS|bS|a|b\}. \end{aligned}$$

Οποιαδήποτε μη κενή λέξη των a, b μπορεί να παραχθεί. Π.χ., η $baab$ παράγεται ως εξής:

$$S \Rightarrow bS \Rightarrow baS \Rightarrow baaS \Rightarrow baab.$$

Άρα, $L(G) = (a + b)^+$.

Παράδειγμα 5: Έστω η ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$, όπου:

$$\begin{aligned} V &= \{S\},\ T = \{a, b\}, \\ R &= \{S \to aS|bS|a|b|\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Τότε, $L(G) = (a + b)^*$.

Παρατήρηση: Επίσης όμως, $(a + b)^* = L(G_1)$, όπου $G_1 = (V_1, T, R_1, S)$ με $V_1 = \{S, X, Y\}, T = \{a, b\}$ και

$$R_1 = \{S \to X|Y, X \to \varepsilon, Y \to aY|bY|a|b\}.$$

Παράδειγμα 6: Έστω L η γλώσσα όλων των παλινδρομικών λέξεων των a, b. Γνωρίζουμε ότι $a, b, \varepsilon \in L$ κι ότι $x \in L \Rightarrow axa, bxb \in L$. Επομένως, $L = L(G)$, όπου $G = (V, T, R, S), V = \{S\}, T = \{a, b\}$ και

$$R = \{S \to aSa|bSb|a|b|\varepsilon\}.$$

Π.χ., μια παραγωγή της $abbabba$ είναι η:

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abbSbba \Rightarrow abbabba.$$

Παράδειγμα 7: Έστω η ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$, όπου:

$$\begin{aligned} V &= \{S\},\ T = \{a, b\}, \\ R &= \{S \to aSb|ab\}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον πρώτο κανόνα $n - 1$ φορές και μετά το δεύτερο, έχουμε:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow a^3Sb^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^{n-1}Sb^{n-1} \Rightarrow a^nb^n.$$

Άρα, $L(G) = \{a^nb^n : n \geqslant 1\}$.

Συμβολισμός: Για $x \in \Sigma^*$, συμβολίζουμε με $n_\sigma(x)$ το πλήθος των $\sigma \in \Sigma$ στην x.

Παράδειγμα 8: Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια γραμματική για τη γλώσσα $L = \{x \in (a+b)^* : n_a(x) = n_b(x)\}$.

Προφανώς, $\Sigma \in L$. Επίσης, αν $x \in L$, τότε $axb, bxa, xx \in L$. Επομένως, υποψιαζόμαστε ότι η ζητούμενη ΓρΑΣ είναι η παρακάτω:

$$\begin{array}{rcl} G &=& (V, T, R, S), \\ V &=& \{S\}, \quad T \;=\; \{a, b\}, \\ R &=& \{S \to aSb|bSa|SS|\varepsilon\}. \end{array}$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $L(G) = L$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι $L(G) \subset L$ ή ισοδύναμα το εξής:

$$w \in (V \cup T)^* \text{ και } S \overset{+}{\Rightarrow} w \text{ συνεπάγονται } n_a(w) = n_b(w), \tag{I}$$

όπου $\overset{+}{\Rightarrow}$ σημαίνει παραγωγή σε ένα ή περισσότερα βήματα. Ο λόγος που πήραμε $w \in (S \cup T)^*$ παραπάνω είναι γιατί στην τελική λέξη στο T^* τα S μετατρέπονται σε ε μέσω του κανόνα $S \to \varepsilon$ κι αφήνουν το πλήθος των a και b ίδιο.

Η επαγωγή θα γίνει στο μήκος k της παραγωγής του w από την S.

Βασικό βήμα ($k = 1$): Από τους κανόνες της G, αν $S \Rightarrow w$, τότε $w = aSb$ ή bSa ή SS ή ε, και ς' οποιαδήποτε περίπτωση, $n_a(w) = n_b(w)$.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (I) ισχύει σε k ή λιγότερα βήματα.

Επαγωγικό Βήμα: Αν $S \overset{+}{\Rightarrow} w$ σε $k+1$ βήματα, τότε $S \overset{+}{\Rightarrow} w'$ σε k βήματα και $w' \Rightarrow w$, για κάποιο $w' \in (S \cup \{a, b\})^*$. Από την επαγωγική υπόθεση, $n_a(w') = n_b(w')$. Αλλά $w' \Rightarrow w$ σημαίνει ότι ισχύει μια από τις εξής περιπτώσεις:

(α) $w = aw'b \Rightarrow n_a(w) = n_a(w') + 1 = n_b(w') + 1 = n_b(w)$,
(β) $w = bw'a \Rightarrow$ παρόμοια $n_a(w) = n_b(w)$,
(γ) $w = w'w' \Rightarrow n_a(w) = 2n_a(w') = 2n_b(w') = n_b(w)$,
(δ) $w = \varepsilon \Rightarrow n_a(w) = 0 = n_b(w)$.

Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο $L \subset L(G)$ ή ισοδύναμα το εξής:

$$w \in L, |w| = k \geqslant 0 \text{ συνεπάγονται ότι } S \overset{+}{\Rightarrow} w. \tag{II}$$

Η επαγωγή θα γίνει στο μήκος k των λέξεων. Σημειωτέον ότι οι λέξεις της L έχουν πάντα άρτιο μήκος, δηλαδή, $k = 2n$.

Βασικό βήμα ($k = 0$): Η μόνη λέξη της L μήκους 0 είναι η ε και παράγεται από τον κανόνα $S \to \varepsilon$ της G. Άρα, το βασικό βήμα ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (II) ισχύει για λέξεις μήκους μικρότερου ή ίσου του $k = 2n$.

Επαγωγικό Βήμα: Αν $w \in L, |w| = 2(n+1) = k+2$, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $w = aw^{'}b$,
(β) $w = bw^{'}a$,
(γ) $w = aw^{'}a$,
(δ) $w = bw^{'}b$.

(α) Αν $w = aw^{'}b$, τότε $|w^{'}| = 2n = k$ και $w^{'} \in L$. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w^{'}$ και το w παραγεται ως εξής: $S \Rightarrow aSb \stackrel{+}{\Rightarrow} aw^{'}b = w$.

(β) Όπως (α).

(γ) Αν $w = aw^{'}a$, τότε πρέπει $w = w_1w_2$, για $w_1, w_2 \in L$ και $|w_1|, |w_2| \leqslant 2n = k$. Άρα, $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w_1$ και $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w_2$, οπότε το w παράγεται ως εξής: $S \Rightarrow SS \stackrel{+}{\Rightarrow} w_1S \stackrel{+}{\Rightarrow} w_1w_2 = w$.

(δ) Όπως (γ).

Παράδειγμα 9: Να βρεθεί η γραμματική για την γλώσσα

$$L = \{x \in (a+b)^* \colon n_a(x) > n_b(x)\}.$$

Προφανώς, $a \in L$, κι επίσης, αν $x \in L$, τότε και $ax, xa \in L$. Επίσης, η λέξη xx (για $x \in L$) έχει τουλάχιστον 2 a περισσότερα των b. Άρα, και $bxx, xbx, xxb \in L$.

Επομένως, υποψιαζόμαστε ότι η ζητούμενη ΓρΑΣ είναι:

$$\begin{aligned} G &= \{\{S\}, \{a,b\}, R, S\}, \\ R &= \{S \to a|aS|Sa|bSS|SbS|SSb\}. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $L(G) = L$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι $L(G) \subset L$ ή ισοδύναμα το εξής:

$$w \in (V \cup T)^* \text{ και } S \stackrel{+}{\Rightarrow} w \text{ συνεπάγονται ότι } n_a(w) + n_s(w) > n_b(w), \qquad \text{(I)}$$

όπου $\stackrel{+}{\Rightarrow}$ σημαίνει παραγωγή σε τουλάχιστον ένα βήμα. Πάλι παίρνουμε $w \in (V \cup T)^*$ (κι όχι $w \in T^*$), γιατί στην τελική λέξη τα $V = S$ μετατρέπονται σε a μέσω του κανόνα $S \to a$, οπότε η λέξη αυτή οπωσδήποτε θα έχει περισσότερα a από b.

Η επαγωγή θα γίνει στον αριθμό των βημάτων της παραγωγής της (I).

Βασικό βήμα ($k = 1$): Από τους κανόνες της G, αν $S \Rightarrow w$, τότε $w = a$ ή aS ή Sa ή bSS ή SbS ή SSb, και ς' όλες τις περιπτώσεις $n_a(w) + n_s(w) > n_b(w)$, δηλαδή, η (I) ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (I) ισχύει σε k ή λιγότερα βήματα παραγωγής.

Επαγωγικό Βήμα: Αν $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w$ σε $k+1$ βήματα, τότε $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w^{'}$ σε k βήματα και $w^{'} \Rightarrow w$, για κάποιο $w^{'} \in (S \cup \{a,b\})^*$. Αλλά $w^{'} \Rightarrow w$ σημαίνει ότι ισχύει μια από τις εξής περιπτώσεις:

(α) $w = a \Rightarrow n_a(w) + n_s(w) = 1 + 0 = 1 > 0 = n_b(w)$,
(β) $w = aS \Rightarrow n_a(w) + n_s(w) = 1 + 1 = 2 > 0 = n_b(w)$,
(γ) $w = bSS \Rightarrow n_a(w) + n_s(w) = 0 + 2 > 1 = n_b(w)$.

Ενώ $w = Sa$ παρόμοια με (β) και $w = SbS$ ή SSb παρόμοια με (γ).

Στη συνέχεια θα δείξουμε το αντίστροφο $L \subset L(G)$ ή ισοδύναμα το εξής:

$$w \in L, |w| = k \geqslant 1 \text{ συνεπάγονται } S \stackrel{+}{\Rightarrow} w. \tag{II}$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος k των λέξεων.

Βασικό βήμα ($k = 1$): Η μόνη λέξη της L μήκους 1 είναι η $x = a$, η οποία παράγεται από τον κανόνα $S \to a$. Άρα, το βασικό βήμα ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (II) ισχύει για λέξεις μήκους μικρότερου ή ίσου του k.

Επαγωγικό Βήμα: Αν $w \in L, |w| = k+1$, τότε διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

(α) $w = w^{'}b$,
(β) $w = bw^{'}$,
(γ) $w = aw^{'}a$.

Κάθε άλλη περίπτωση είναι μιας τέτοιας μορφής: π.χ., $w = aw_1$ θα είναι είτε $w = aw^{'}a$ ή $w = (aw^{'})b$.

(α) Η περίπτωση $w = w^{'}b$: Τότε, $n_a(w) = n_a(w^{'})$ και $n_b(w) = n_b(w^{'})+1$. Αλλά, επειδή $w \in L$, $n_a(w) > n_b(w)$, οπότε $n_a(w^{'}) > n_b(w^{'})+1$ ή $n_a(w^{'}) \geqslant n_b(w^{'})+2$. Επομένως, υπάρχουν w_1, w_2 με $n_a(w_i) \geqslant n_b(w_i)+1, i = 1,2$, τέτοια ώστε $w^{'} = w_1w_2$. Δηλαδή, $w_i \in L, |w_i| \leqslant |w^{'}| = k, i = 1,2$, και, άρα, από την επαγωγική υπόθεση, $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w_i, i = 1,2$. Συνεπώς, το w παράγεται ως εξής:

$$S \Rightarrow SSb \stackrel{+}{\Rightarrow} w_1Sb \stackrel{+}{\Rightarrow} w_1w_2b = w^{'}b = w.$$

(β) Η περίπτωση $w = bw^{'}$: Όπως πιο πριν, $w = w_1w_2$ με $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w_i, i = 1,2$, κι έτσι το w παράγεται ως εξής:

$$S \Rightarrow bSS \stackrel{+}{\Rightarrow} bw_1S \stackrel{+}{\Rightarrow} bw_1w_2 = bw^{'} = w.$$

(γ) Η περίπτωση $w = aw^{'}a$: Τώρα, είτε $n_b(w^{'}) = 0$ ή $n_b(w^{'}) \geqslant 1$. Όταν $n_b(w^{'}) = 0$, $w^{'} = a^m$, οπότε το w παράγεται ως εξής:

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aSa \stackrel{*}{\Rightarrow} aa^m a = w$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας $S \to aS$ $m-1$ φορές και στο τέλος ο $S \to a$). Όταν $n_b(w^{'}) \geqslant 1$, οπότε $w = w_1 b w_2$ με w_1, w_2 όπως στην επαγωγική υπόθεση, τότε $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w_i, i = 1, 2$, και το w παράγεται ως εξής:

$$S \Rightarrow SbS \stackrel{+}{\Rightarrow} w_1 bS \stackrel{+}{\Rightarrow} w_1 b w_2 = w.$$

Παράδειγμα 10: Έστω η ΓρΑΣ $G = (V, T, R, S)$, όπου:

$$\begin{aligned} V &= \{S, A\},\ T = \{a, b\}, \\ R &= \{S \to AA, A \to AAA|a|bA|Ab\}. \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι η γλώσσα $L(G)$, που παράγεται από την G, είναι η:

$$L(G) = \{x \in (a+b)^* : n_a(x) \text{ άρτιος θετικός } \} = L$$

Απόδειξη: Πρώτα θα δείξουμε επαγωγικώς ότι $L(G) \subset L$ ή ισοδύναμα:

$$w \in (V \cup T)^* \text{ και } S \stackrel{+}{\Rightarrow} w \text{ συνεπάγονται } n_a(w) + n_A(w) \text{ άρτιος θετικός.} \qquad \text{(I)}$$

Η επαγωγή θα γίνει στον αριθμό των βημάτων της παραγωγής της (I).

Βασικό βήμα ($k = 1$): Από τους κανόνες της G, αν $S \Rightarrow w$, τότε $w = AA$ και σε όλες τις περιπτώσεις $n_a(w) + n_A(w) = 0 + 2$, (θετικός άρτιος). Άρα, ισχύει το βασικό βήμα.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (I) ισχύει σε k ή λιγότερα βήματα παραγωγής.

Επαγωγικό Βήμα: Αν $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w$ σε $k+1$ βήματα, τότε $S \stackrel{+}{\Rightarrow} w^{'}$ σε k βήματα και $w^{'} \Rightarrow w$, για κάποιο $w^{'} \in (V \cup T)^*$. Προφανώς, από την επαγωγική υπόθεση, $n_a(w^{'}) + n_A(w^{'})$ θετικός άρτιος.

Αν $w^{'} \Rightarrow w$ παράγεται από $S \to AA$, τότε $n_a(w) = n_a(w^{'})$ και $n_A(w) = n_A(w^{'}) + 2$, οπότε $n_a(w) + n_A(w) = n_a(w^{'}) + n_A(w^{'}) + 2$, θετικός άρτιος.

Αν $w^{'} \Rightarrow w$ παράγεται από $A \to AAA$, τότε $n_a(w) = n_a(w^{'})$ και $n_A(w) = 3n_A(w^{'})$, οπότε $n_a(w) + n_A(w) = \Big(n_a(w^{'}) + n_A(w^{'})\Big) + 2n_A(w^{'})$, θετικός άρτιος.

Αν $w^{'} \Rightarrow w$ παράγεται από $A \to a$, τότε $n_a(w) = n_A(w^{'}) + n_a(w^{'})$ και $n_A(w) = 0$, οπότε $n_a(w) + n_A(w) = n_a(w^{'}) + n_A(w^{'})$, θετικός άρτιος.

Αν $w^{'} \Rightarrow w$ παράγεται από $A \to bA$ ή $A \to Ab$, τότε $n_a(w) = n_a(w^{'})$ και $n_A(w) = n_A(w^{'})$, οπότε $n_a(w) + n_A(w) = n_a(w^{'}) + n_A(w^{'})$, θετικός άρτιος.

Μένει να δείξουμε (επαγωγικά) ότι $L \subset L(G)$ ή ισοδύναμα:

$$w \in L, |w| = k \geqslant 2 \text{ συνεπάγονται } S \overset{+}{\Rightarrow} w. \tag{II}$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής:

$$A \overset{+}{\Rightarrow} w \text{ αν και μόνον αν } n_a(w) \text{ περιττός θετικός .} \tag{$*$}$$

Θα προχωρήσουμε με επαγωγή στο μήκος k των λέξεων της L.

Βασικό Βήμα ($k = 2$): Η μόνη λέξη μήκους 2 στην L είναι είτε το aa και παράγεται ως $S \Rightarrow AA \Rightarrow aa$. Άρα, ισχύει το βασικό βήμα.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (II) ισχύει για λέξεις μήκους $\leqslant k$.

Επαγωγικό Βήμα: Έστω $w \in L, |w| = k + 1$. Τότε, είτε $w = aw'$ ή $w = b^m aw'$ (για κάποιο $m \geqslant 1$).

Όταν $w = aw'$, το $n_a(w')$ πρέπει να είναι περιττός θετικός, οπότε $A \overset{+}{\Rightarrow} w'$ (λόγω της βοηθητικής πρότασης ($*$)) και, άρα, το w παράγεται ως εξής: $S \Rightarrow AA \Rightarrow aA \overset{+}{\Rightarrow} aw' = w$.

Όταν $w = b^m aw'$, πάλι το $n_a(w')$ πρέπει να είναι περιττός θετικός, οπότε $A \overset{+}{\Rightarrow} w'$ και $S \Rightarrow AA \underset{(m)}{\overset{+}{\Rightarrow}} b^m AA \Rightarrow b^m aA \overset{+}{\Rightarrow} b^m Aw' = w$.

Ορισμός: Μια γραμματική ονομάζεται **ασαφής** ή **διφορούμενη** αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες παραγωγές για την ίδια λέξη.

Παράδειγμα: Έστω $V = \{S\}$, $T = \{(,)\}$ και $G = \{V, T, R, S\}$. Τότε οι γραμματικές με τους κανόνες:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{S \to SS|(S)|\varepsilon\}, \\ R_2 &= \{S \to (S)S|\varepsilon\} \end{aligned}$$

και οι δύο παράγουν συμβολοσειρές με παρενθέσεις έτσι ώστε να υπάρχει κανονική αντιστοιχία μεταξύ των αριστερών και των δεξιών παρενθέσεων.

Η πρώτη γραμματική είναι ασαφής, γιατί η ( )(( )) μπορεί να παραχθεί με πολλούς τρόπους. Π.χ.:

$$\begin{aligned} &S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow (\,)S \Rightarrow (\,)(S) \Rightarrow (\,)((S)) \Rightarrow (\,)((\,)), \\ &S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow S((S)) \Rightarrow S((\,)) \Rightarrow (S)((\,)) \Rightarrow (\,)((\,)). \end{aligned}$$

Ενώ η δεύτερη γραμματική δεν είναι ασαφής:

$$S \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S)(S)S \Rightarrow (\,)(S)S \Rightarrow (\,)((S)S)S \Rightarrow (\,)((\,)).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $G = \{V, T, R, S\}, V = \{S, A\}, T = \{a, b\}, R = \{S \to aAa|bAb|\varepsilon,\ A \to SS\}$. Δείξτε ότι η παραγόμενη γλώσσα είναι η $L = \{x \in (a+b)^* : n_a(x)$ και $n_b(x)$ άρτια$\}$.

2. Έστω $G = \{V, T, R, S\}$, $V = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, $R = \{S \to aB|bA,\ A \to aS|bAA|a,\ B \to bS|aBB|b\}$. Δείξτε ότι η παραγόμενη γλώσσα είναι η $L = \{x \in (a+b)^* : n_a(x) = n_b(x)\}$.