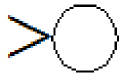
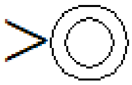
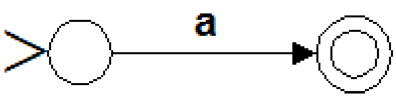
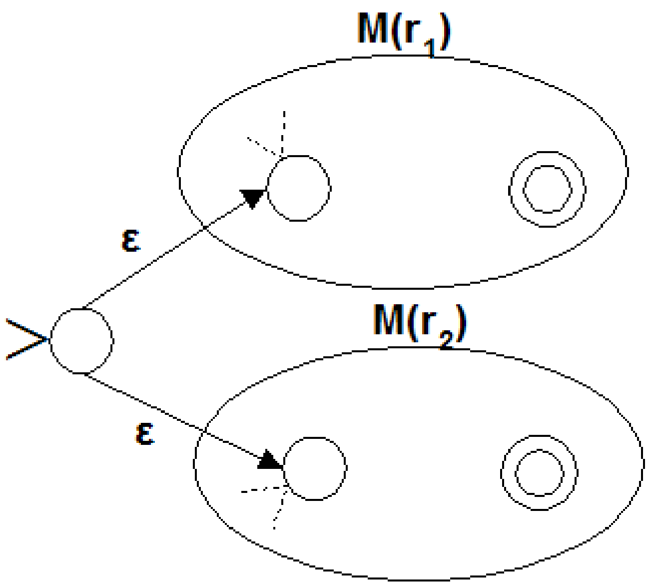
2.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΓΛΩΣΣΩΝ

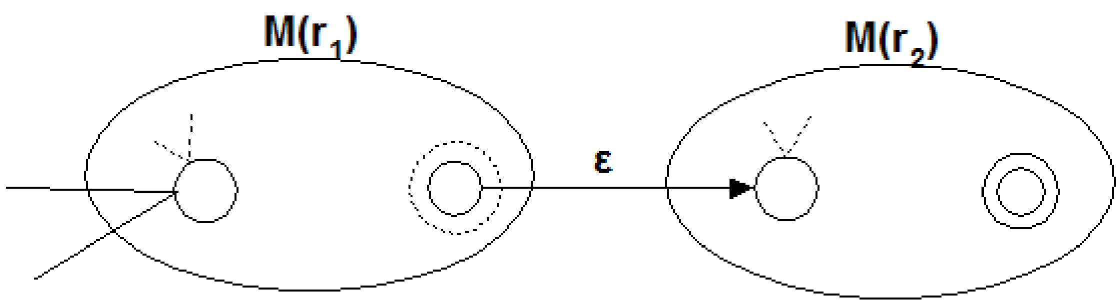
2.4.1 ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Θεώρημα: 1: Έστω r μια κανονική έκφραση. Τότε υπάρχει ένα ΜΠΑ-ε που αναγνωρίζει την γλώσσα $L(r)$ της r.

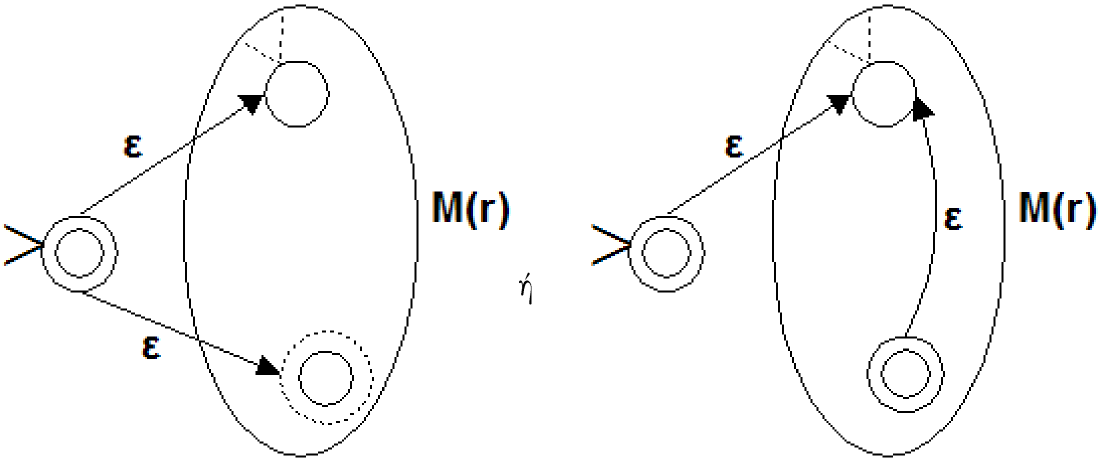
Συμβολίζουμε με $M(r)$ το ΜΠΑ-ε που αντιστοιχεί στην κανονική έκφραση r. Τότε έχουμε τους εξής τύπους στοιχειωδών αυτομάτων:

- $M(\varnothing)$: 
- $M(\varepsilon)$: 
- $M(a)$: 

- $M(r_1 + r_2)$: 

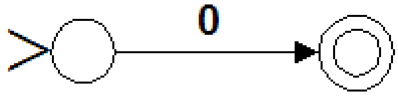
- $M(r_1 r_2)$: 

- $M(r^*$

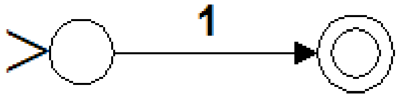


Παράδειγμα 1: Να κατασκευαστεί ένα ΜΠΑ-ε για την κανονική έκφραση $r = (01)^* + 1^*$.

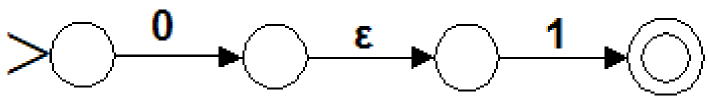
- $M(0)$:



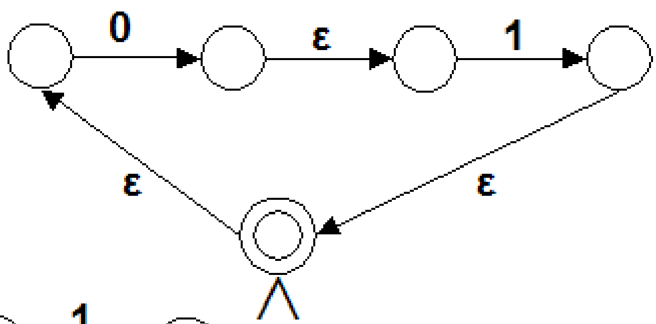
- $M(1)$:



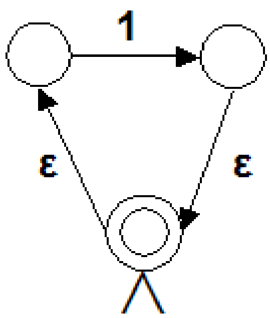
- $M(01)$:



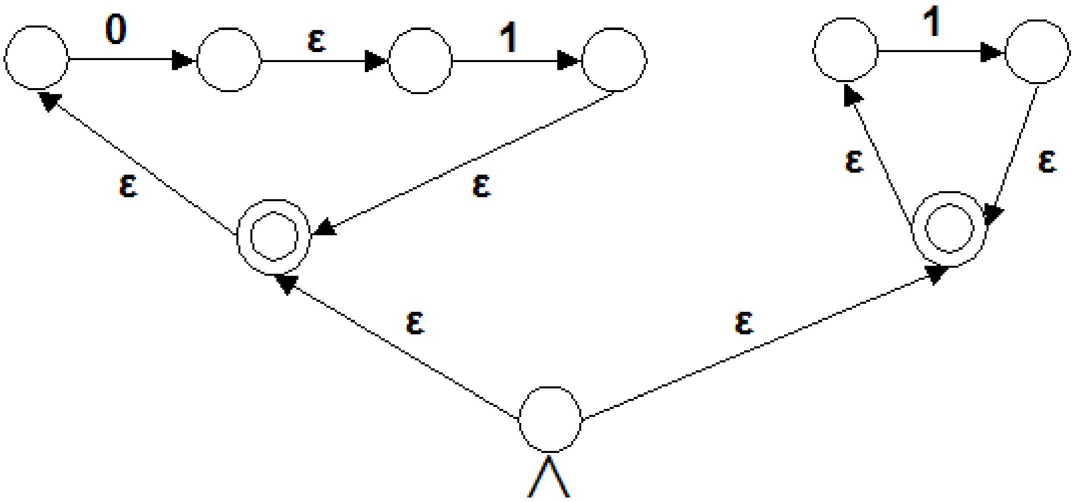
- $M((01)^*)$:



- $M(1^*)$:

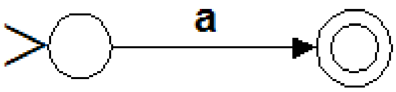


- $M((01)^* + 1^*)$:

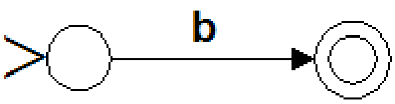


Παράδειγμα 2: Να κατασκευαστεί ένα ΜΠΑ-ε για την κανονική έκφραση $r = (ab + aab)^*$.

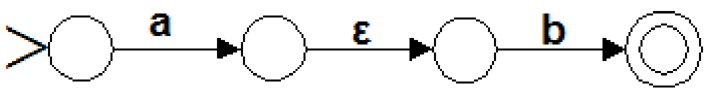
- $M(a)$:



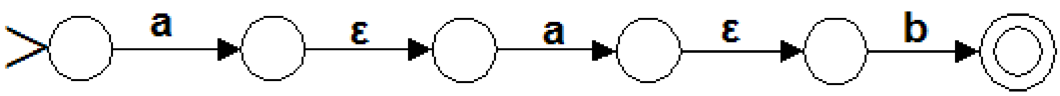
- $M(b)$:



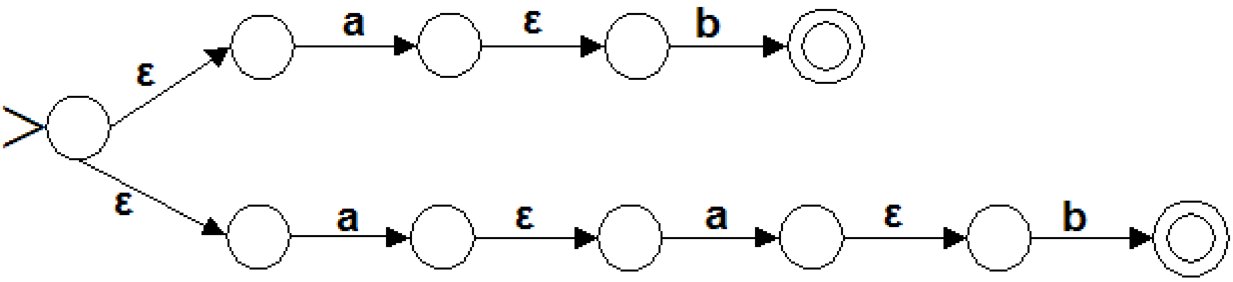
- $M(ab)$:



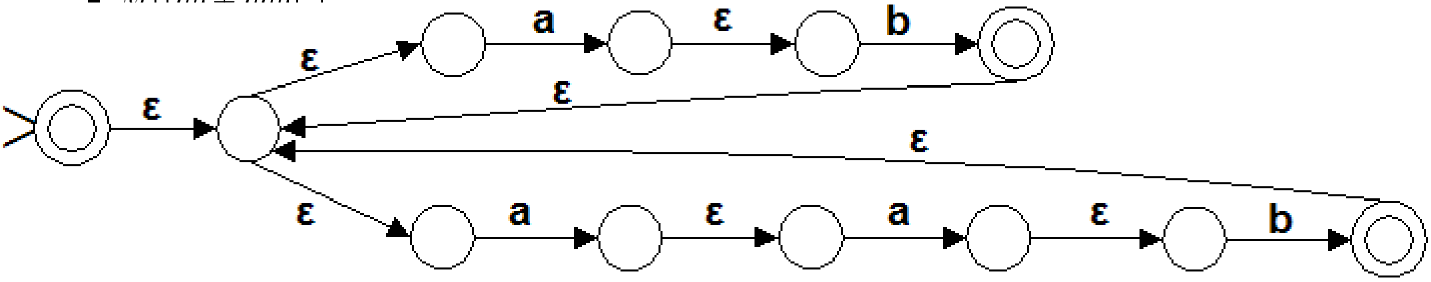
- $M(aab)$:



- $M(ab + aab)$:



- $M((ab + aab)^*)$:



Θεώρημα: **2:** Έστω $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ένα ΝΠΑ. Τότε υπάρχει μια κανονική έκφραση r, της οποίας η αντίστοιχη κανονική γλώσσα $L(r)$ αναγνωρίζεται από το M.

Θεωρούμε ότι το Q αποτελείται από n καταστάσεις. Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$R : Q \times Q \times Q \to \Sigma^*$$

ως εξής:

- συμβολίζουμε $R(i, j, k) = R(q_i, q_j, q_k)$,
- $R(i, j, k)$ = το σύνολο όλων των λέξεων που αναγνωρίζονται κατά μήκος όλων των μονοπατιών από την q_i ως την q_j, που δεν περνούν από τις q_l για $l > k$.

Προφανώς, ισχύουν:

$R(i, j, n)$ =σύνολο όλων των λέξεων από την q_i ως την q_j,

$$R(i, j, 0) = \begin{cases} \{\sigma \in \Sigma : \delta(q_i, \sigma) = q_j\}, & \text{αν } i \neq j, \\ \{\varepsilon\} \cap \{\sigma \in \Sigma : \delta(q_i, \sigma) = q_j\}, & \text{αν } i = j, \end{cases}$$

$$\boxed{R(i, j, k+1) = R(i, j, k) + R(i, k, k)R(k, k, k)^* R(k, j, k)}$$

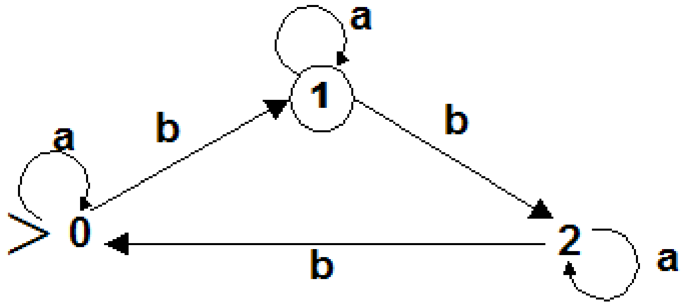
Με άλλα λόγια η τελευταία σχέση λέει ότι:

$$\begin{cases} \text{το σύνολο των λέξεων από } q_i \to q_j \text{ χωρίς } q_l \text{ με } l > k+1 \\ \text{ισούται με} \\ \text{το σύνολο των λέξεων από } q_i \to q_j \text{ χωρίς } q_l \text{ με } l > k \\ \text{ένωση} \\ \text{το σύνολο των λέξεων από } q_i \to q_k \text{ χωρίς } q_l \text{ με } l > k \\ \text{συνένωση} \\ \text{την κλειστότητα άστρο του συνόλου των λέξεων από } q_k \to q_k \text{ χωρίς } q_l \text{ με } l > k \\ \text{συνένωση} \\ \text{το σύνολο των λέξεων από } q_k \to q_j \text{ χωρίς } q_l \text{ με } l > k. \end{cases}$$

Άρα, η ζητούμενη κανονική γλώσσα/έκφραση είναι:

$$L(r) = \bigcup_{q_f \in F} R(q_0, q_f, n).$$

Παράδειγμα 1: Για το ΝΠΑ:



να βρεθεί η αναγνωριζόμενη κανονική έκφραση.

Έχουμε:

$$L(r) = R(0,1,3),$$

όπου:

$$\begin{aligned}
R(0,1,3) &= R(0,1,2) + R(0,2,2)R(2,2,2)^*R(2,1,2),\\
\\
R(0,1,2) &= R(0,1,1) + R(0,1,1)R(1,1,1)^*R(1,1,1),\\
R(0,2,2) &= R(0,2,1) + R(0,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
R(2,2,2) &= R(2,2,1) + R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
R(2,1,2) &= R(2,1,1) + R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,1,1),\\
\\
R(0,1,1) &= R(0,1,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(1,1,1) &= R(1,1,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(0,2,1) &= R(0,2,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(1,2,1) &= R(1,2,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,2,1) &= R(2,2,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,1,1) &= R(2,1,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0).
\end{aligned}$$

Αλλά:

$$\begin{aligned}
R(0,0,0) &= \varepsilon + a,\\
R(0,1,0) &= b,\\
R(0,2,0) &= \varnothing,\\
R(1,0,0) &= \varnothing,\\
R(1,1,0) &= \varepsilon + a,\\
R(1,2,0) &= b,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(2,0,0) &= b,\\
R(2,1,0) &= \varnothing,\\
R(2,2,0) &= \varepsilon + a,
\end{aligned}$$

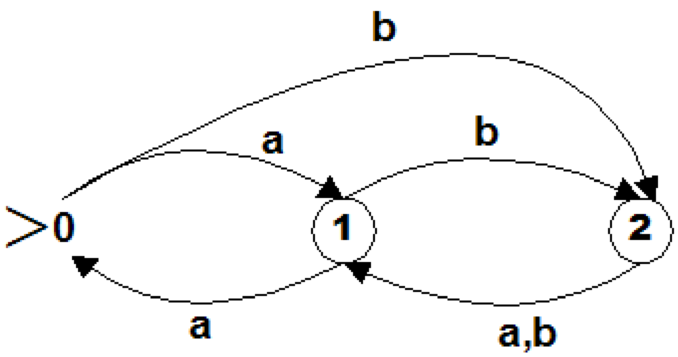
Επομένως:

$$\begin{aligned}
R(0,1,1) &= b + (\varepsilon + a)(\varepsilon + a)^*b = b + a^*b = a^*b,\\
R(1,1,1) &= \varepsilon + a + \varnothing(\varepsilon + a)^*b = \varepsilon + a,\\
R(0,2,1) &= \varnothing + (\varepsilon + a)(\varepsilon + a)^*\varnothing = \varnothing,\\
R(1,2,1) &= b + \varnothing(\varepsilon + a)^*\varnothing = b,\\
R(2,2,1) &= \varepsilon + a + b(\varepsilon + a)^*\varnothing\varepsilon + a,\\
R(2,1,1) &= \varnothing + b(\varepsilon + a)^*b = ba^*b,\\
\\
R(0,1,2) &= a^*b + a^*b(\varepsilon + a)^*(\varepsilon + a) = a^*ba^*,\\
R(0,2,2) &= \varnothing + a^*b(\varepsilon + a)^*b = a^*ba^*b,\\
R(2,2,2) &= \varepsilon + a + ba^*b(\varepsilon + a)^*b = \varepsilon + a + ba^*ba^*b,\\
R(2,1,2) &= ba^*b + ba^*b(\varepsilon + a)^*(\varepsilon + a) = ba^*ba^*.
\end{aligned}$$

Άρα:

$$L(r) = a^*ba^* + a^*ba^*b(\varepsilon + a + ba^*ba^*b)^*ba^*ba^*.$$

Παράδειγμα 2: Για το ΝΠΑ:



να βρεθεί η αναγνωριζόμενη κανονική έκφραση.

Έχουμε:

$$L(r) = R(0,1,3) + R(0,2,3)$$

όπου:

$$\begin{aligned}
R(0,1,3) &= R(0,1,2) + R(0,2,2)R(2,2,2)^*R(2,1,2),\\
R(0,2,3) &= R(0,2,2) + R(0,2,2)R(2,2,2)^*R(2,2,2),\\
\\
R(0,1,2) &= R(0,1,1) + R(0,1,1)R(1,1,1)^*R(1,1,1),\\
R(0,2,2) &= R(0,2,1) + R(0,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
R(2,2,2) &= R(2,2,1) + R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
R(2,1,2) &= R(2,1,1) + R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,1,1),\\
\\
R(0,1,1) &= R(0,1,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(1,1,1) &= R(1,1,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(0,2,1) &= R(0,2,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(1,2,1) &= R(1,2,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,2,1) &= R(2,2,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,1,1) &= R(2,1,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0).
\end{aligned}$$

Άλλά:

$$\begin{aligned}
R(0,0,0) &= \varepsilon,\\
R(0,1,0) &= a,\\
R(0,2,0) &= b,\\
R(1,0,0) &= a,\\
R(1,1,0) &= \varepsilon,\\
R(1,2,0) &= b,\\
R(2,0,0) &= \varnothing,\\
R(2,1,0) &= a+b,\\
R(2,2,0) &= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Επομένως:

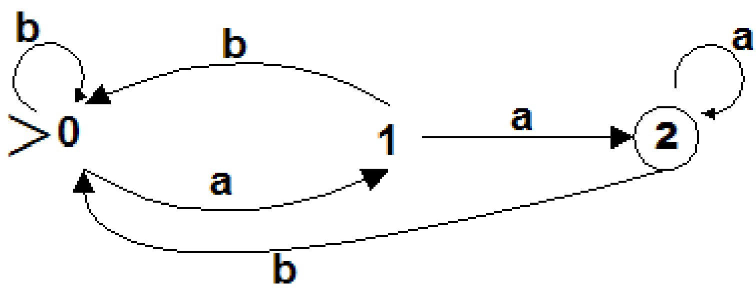
$$\begin{aligned}
R(0,1,1) &= a + \varepsilon\varepsilon^*a = a,\\
R(1,1,1) &= \varepsilon + a\varepsilon^*a = \varepsilon + aa,\\
R(0,2,1) &= b + \varepsilon\varepsilon^*b = b,\\
\\
R(1,2,1) &= b + a\varepsilon^*b = b + ab,\\
R(2,2,1) &= \varepsilon + \varnothing\varepsilon^*b = \varepsilon,\\
R(2,1,1) &= a + b + \varnothing\varepsilon^*a = a + b,\\
R(0,1,2) &= a + a(\varepsilon+aa)^*(\varepsilon+aa) = a + a(aa)^* = a(aa)^*,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(0,2,2) &= b + a(\varepsilon + aa)^*(b + ab) = b + a(aa)^*(\varepsilon + a)b = b + aa^*b = b + a^+b = a^*b,\\
R(2,2,2) &= \varepsilon + (a+b)(\varepsilon + aa)^*(b + ab)\varepsilon, +(a+b)(aa)^*(\varepsilon + a)b = \varepsilon + (a+b)a^*b,\\
R(2,1,2) &= a + b + (a+b)(\varepsilon + aa)^*(\varepsilon + aa)a + b + (a+b)(aa)^* = (a+b)(aa)^*.
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
L(r) &= a(aa)^* + a^*b\left(\varepsilon + (a+b)a^*b\right)^*(a+b)(aa)^* + a^*b\\
&+ (a^*b)\left(\varepsilon + (a+b)a^*b\right)^*\left(\varepsilon + (a+b)a^*b\right) =\\
&= a(aa)^* + a^*b\left((a+b)a^*b\right)^*(a+b)(aa)^* + a^*b + a^*b\left((a+b)a^*b\right)^* =\\
&= a(aa)^* + a^*b\left((a+b)a^*b\right)^*(a+b)(aa)^* + a^*b\left((a+b)a^*b\right)^* =\\
&= a(aa)^* + a^*b\left((a+b)a^*b\right)^*\left(\varepsilon(a+b)(aa)^*\right) =
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3: Για το ΝΠΑ



να βρεθεί η αναγνωριζόμενη κανονική έκφραση.

Έχουμε:

$$L(r) = R(0,2,3)$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
R(0,2,3) &= R(0,2,2) + R(0,2,2)R(2,2,2)^*R(2,2,2),\\
\\
R(0,2,2) &= R(0,2,1) + R(0,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
R(2,2,2) &= R(2,2,1) + R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
\\
R(0,2,1) &= R(0,2,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(0,1,1) &= R(0,1,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(1,1,1) &= R(1,1,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(1,2,1) &= R(1,2,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,2,1) &= R(2,2,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,1,1) &= R(2,1,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0).
\end{aligned}
$$

Άλλά:

$$\begin{aligned}
R(0,0,0) &= \varepsilon + b,\\
R(0,1,0) &= a,\\
R(0,2,0) &= \varnothing,\\
R(1,0,0) &= b,\\
R(1,1,0) &= \varepsilon,\\
R(1,2,0) &= a,\\
R(2,0,0) &= b,\\
R(2,1,0) &= \varnothing,\\
R(2,2,0) &= \varepsilon + b.
\end{aligned}$$

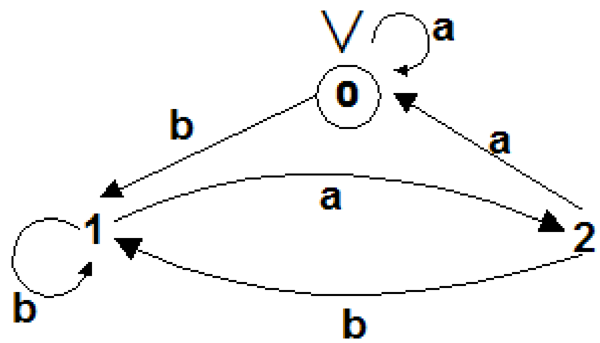
Επομένως:

$$\begin{aligned}
R(0,2,1) &= \varnothing + (\varepsilon + b)(\varepsilon + b)^*\varnothing = \varnothing,\\
R(0,1,1) &= a + (\varepsilon + b)(\varepsilon + b)^* a = a + b^* a = b^* a,\\
R(1,1,1) &= \varepsilon + b(\varepsilon + b)^* a = \varepsilon + b^+ a,\\
R(1,2,1) &= a + b(\varepsilon + b)^* \varnothing = a,\\
R(2,2,1) &= \varepsilon + a + b(\varepsilon + b)^* \varnothing = \varepsilon + a,\\
R(2,1,1) &= \varnothing + b(\varepsilon + b)^* a = b^+ a,\\
R(0,2,2) &= \varnothing + b^* a(\varepsilon + b^+ a)^* a = b^* a(b^+ a)^* a,\\
R(2,2,2) &= \varepsilon + a + (b^+ a)(\varepsilon + b^+ a)^* a = \varepsilon + a + (b^+ a)^* a = \varepsilon + (b^+ a)^* a.
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
L(r) = R(0,2,3) &= b^* a(b^+ a)^* a + b^* a(b^+ a)^* a(\varepsilon + (b^+ a)^* a)^* (b^+ a)^* a =\\
&= b^* a(b^+ a)^* a \left((b^+ a)^* a\right)^* =\\
&= b^* a \left((b^+ a)^* a\right)^+
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4: Για το ΝΠΑ



να βρεθεί η αναγνωριζόμενη κανονική έκφραση.

Έχουμε:

$$L(r) = R(0,0,3),$$

όπου:

$$\begin{aligned}
R(0,0,3) &= R(0,0,2) + R(0,2,2)R(2,2,2)^*R(2,0,2),\\
\\
R(0,0,2) &= R(0,0,1) + R(0,1,1)R(1,1,1)^*R(1,0,1),\\
R(0,2,2) &= R(0,2,1) + R(0,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
R(2,2,2) &= R(2,2,1) + R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1),\\
R(2,0,2) &= R(2,0,1) + R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,0,1),\\
\\
R(0,0,1) &= R(0,0,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,0,0),\\
R(0,1,1) &= R(0,1,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(1,1,1) &= R(1,1,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(1,0,1) &= R(1,0,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,0,0),\\
R(0,2,1) &= R(0,2,0) + R(0,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(1,2,1) &= R(1,2,0) + R(1,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,2,1) &= R(2,2,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,2,0),\\
R(2,1,1) &= R(2,1,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,1,0),\\
R(2,0,1) &= R(2,0,0) + R(2,0,0)R(0,0,0)^*R(0,0,0).
\end{aligned}$$

Άλλά:

$$\begin{aligned}
R(0,0,0) &= \varepsilon + a,\\
R(0,1,0) &= b,\\
R(0,2,0) &= \varnothing,\\
R(1,0,0) &= \varnothing,\\
R(1,1,0) &= \varepsilon + b,\\
R(1,2,0) &= a,\\
R(2,0,0) &= a,\\
R(2,1,0) &= b,\\
R(2,2,0) &= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Επομένως:

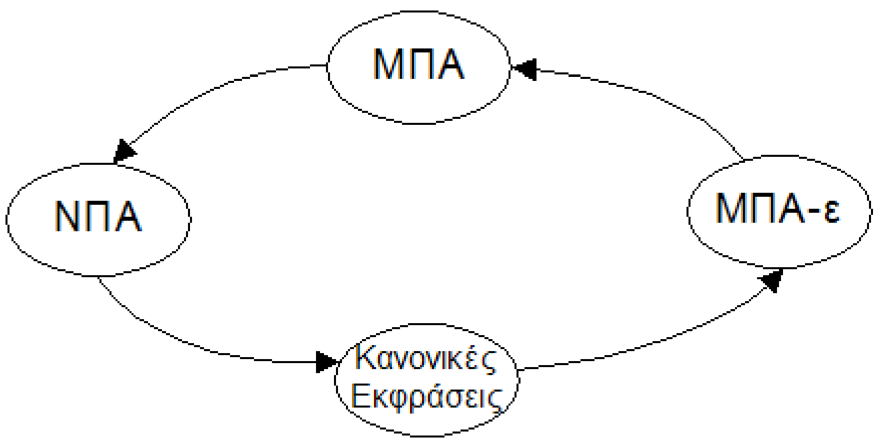
$$
\begin{aligned}
R(0,0,1) &= \varepsilon + a + (\varepsilon + a)(\varepsilon + a)^*(\varepsilon + a) = a^*, \\
R(0,1,1) &= b + (\varepsilon + a)(\varepsilon + a)^* b = b + a^* b a^* b, \\
R(1,1,1) &= \varepsilon + b + \varnothing = \varepsilon + b, \\
R(1,0,1) &= \varnothing + \varnothing = \varnothing, \\
R(0,2,1) &= \varnothing + (\varepsilon + a)(\varepsilon + a)^* \varnothing = \varnothing, \\
R(1,2,1) &= a + \varnothing = a, \\
R(2,2,1) &= \varepsilon + a(\varepsilon + a)^* \varnothing = \varepsilon, \\
R(2,1,1) &= b + a(\varepsilon + a)^* b = b + a^+ b = a^* b, \\
R(2,0,1) &= a + a(\varepsilon + a)^*(\varepsilon + a) = a^+,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(0,0,2) &= a^* + a^* b(\varepsilon + b)^* \varnothing = a^*, \\
R(0,2,2) &= \varnothing + a^* b(\varepsilon + b)^* a = a^* b^+ a, \\
R(2,2,2) &= \varepsilon + (a^* b)(\varepsilon + b)^* a\varepsilon + a^* b^+ a, \\
R(2,0,2) &= a^+ + (b + a^+ b)(\varepsilon + b)^* \varnothing = a^+.
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$L(r) = R(0,0,3) = a^* + a^* b^+ a(a^* b^+ a)^* a^+ = a^* + (a^* b^+ a)^+ a^+.$$

Θεώρημα (Kleene): Μια γλώσσα είναι κανονική αν και μόνον αν αναγνωρίζεται από ένα πεπερασμένο αυτόματο.



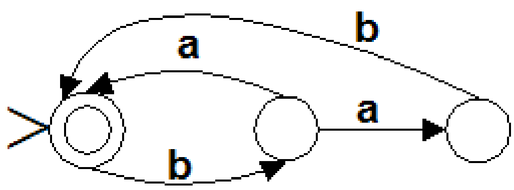
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σχεδιάστε τα ΜΠΑ-ε που αναγνωρίζουν τις παρακάτω κανονικές εκφράσεις:

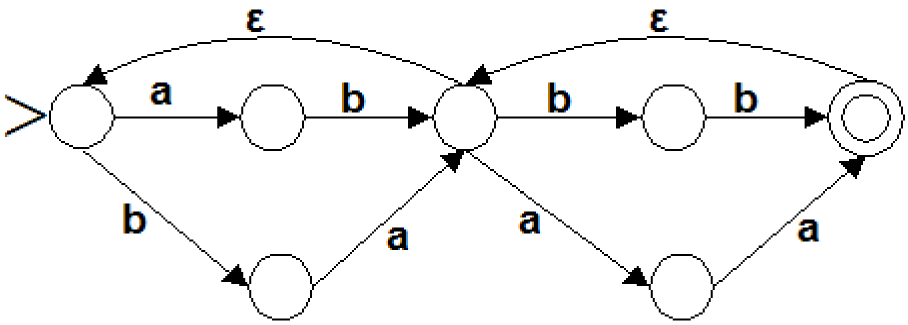
(i) $(ab)^*(ba)^* + aa^*$,
(ii) $\big((ab + aab)^*a^*\big)^*$,
(iii) $\big((a^*b^*a^*)^*b\big)^*$,
(iv) $(ba + b)^* + (bb + a)^*$,
(v) $ba + (a + bb)a^*b$,
(vi) $ab\left(\big((ba)^* + bbb\big)^* + a\right)^* b$,
(vii) $\big((a + b)(a + b)\big)^* + \big((a + b)(a + b)(a + b)\big)^*$,
$(viii)$ $(a + b)(baa)^*(baba)^*$,
(ix) $\big((ab + aab)^*a\big)^*$,
(x) $\big((a^*b^*)^*a^*\big)^*$,
(xi) $(ba + ab)^* + aa(ba + a)^*bb$,
(xii) $b(ab)^* + a^*bab^*$.

2. Να βρεθούν αναλυτικά οι κανονικές εκφράσεις που αναγνωρίζονται από τα παρακάτω αυτόματα:

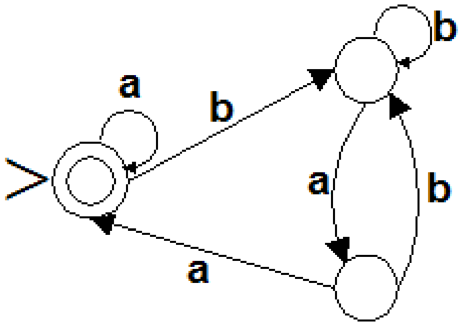
(i)



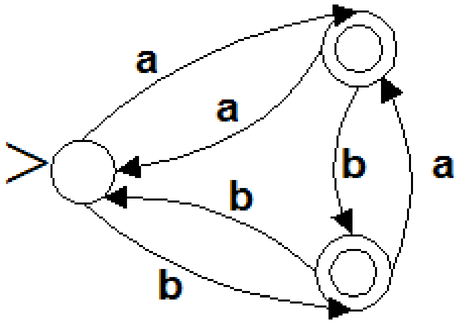
(ii)



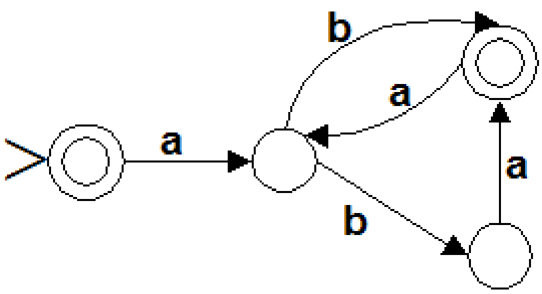
(*iii*)



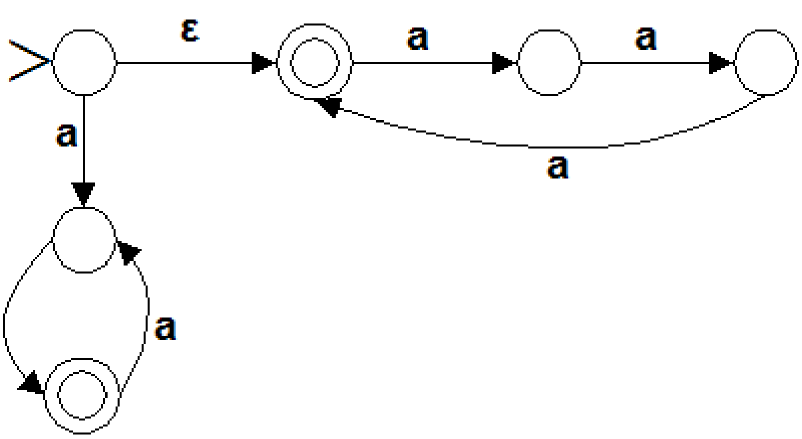
(*iv*)



(*v*)



(*vi*)



2.4.2 ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΗΣ ΑΝΤΛΗΣΗΣ

Θεώρημα (Λήμμα Άντλησης): Έστω L άπειρη κανονική γλώσσα. Τότε υπάρχει σταθερά $n \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται μόνο από την L) τέτοια ώστε, για κάθε $x \in L$ με $|x| \geqslant n$, να συνεπάγεται ότι $x = uvw$, όπου $u, v, w \in \Sigma^*$ είναι τέτοια ώστε

- $|uv| \leqslant n$,
- $|v| \geqslant 1$ (ή $v \neq \varepsilon$), δηλαδή, $1 \leqslant |v| \leqslant n$,
- $uv^m w \in L, \forall m \geqslant 0$.

Παρατήρηση: Στην πράξη, το Λήμμα της Άντλησης ('Λ.Α.' σε συντομογραφία) χρησιμοποιείται για να δείξουμε (δια της εις άτοπον απαγωγής) ότι μια γλώσσα (αποτελούμενη από άπειρο πλήθος λέξεων) *δεν* είναι κανονική γλώσσα. Αυτό κάνουμε στα επόμενα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1: Έστω $L = \{a^{i^2} : i \geqslant 1\}$, δηλαδή, η γλώσσα των λέξεων που αποτελούνται μόνο από a, το πλήθος των οποίων είναι τέλειο τετράγωνο. Θα δείξουμε ότι η L δεν είναι κανονική γλώσσα.

Υποθέτουμε ότι η L είναι κανονική. Έστω n όπως στο Λ.Α. Το $x = a^{n^2} \in L$ έχει μήκος $|x| = n^2 \geqslant n$. Άρα, $a^{n^2} = uvw$, για u, v, w όπως στο Λ.Α. Τότε:

$$\begin{aligned} n^2 = |uvw| &< |uv^2w| \text{ (διότι η λέξη } uv^2w \text{ είναι μεγαλύτερη της } uvw \text{ και } v \neq \varepsilon) \\ &\leqslant n^2 + n \text{ (διότι } |uv^2w| = |uvw| + |v| \text{ και } |v| \leqslant n) \\ &\leqslant (n+1)^2. \end{aligned}$$

Έτσι, $n^2 < |uv^2w| < (n+1)^2$, που συνεπάγεται ότι το μήκος της λέξης uv^2w κείται αυστηρά μεταξύ δύο διαδοχικών τελείων τετραγώνων κι, επομένως, $uv^2w \notin L$, κάτι που είναι άτοπο, γιατί $uv^m w \in L, \forall m \geqslant 0$. Συνεπώς, η L δεν είναι κανονική.

Παράδειγμα 2: Έστω $L = \{a^i b^i : i \geqslant 0\}$. Θα δείξουμε ότι η L δεν είναι κανονική γλώσσα.

Υποθέτουμε ότι η L είναι κανονική. Έστω n όπως στο Λ.Α. Το $x = a^n b^n$ έχει μήκος $|x| = 2n > n$. Άρα, $a^n b^n = uvw$, όπως στο Λ.Α.

Ισχυριζόμαστε ότι το uv περιέχει μόνο a, διότι διαφορετικά, αν $uv = a^j b^k$ $(k \neq 0)$, θα έπρεπε $w = b^l$ και $j = k + l = n$, οπότε $|uv| = j + k = n + k > n$, άτοπο, γιατί $|uv| \leqslant n$.

Επομένως, και το v έχει μόνο a. Άρα, για κάποια $k, j \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} uv &= a^k \Rightarrow w = a^{n-k} b^n, \\ v &= a^j. \end{aligned}$$

Τότε, για κάθε $m \geqslant 0$:

$$uv^m w = (uv) v^{m-1} w = a^k a^{j(m-1)} a^{n-k} b^n = a^{j(m-1)+n} b^n,$$

δηλαδή, $uv^m w \in L \Leftrightarrow j(m-1)+n=n \Leftrightarrow m=1$, άτοπο, γιατί αυτό πρέπει να ισχύει για όλα τα $m \geqslant 0$.

Παράδειγμα 3: Έστω $L = \{a^i : i$ πρώτος $\}$. Θα δείξουμε ότι η L δεν είναι κανονική γλώσσα.

Υποθέτουμε ότι η L είναι κανονική. Έστω n όπως στο Λ.Α. Θεωρούμε p πρώτο, $p > n$, και $x = a^p \in L$. Σύμφωνα με το ΛΑ, $a^p = uvw$.

Έστω $|u| = i, |v| = j \neq 0, |w| = k$, οπότε $uvw = a^{i+j+k}$ ή $i+j+k = p$. Αλλά, για κάθε $m \geqslant 0, uv^m w \in L$, το οποίο συνεπάγεται ότι $i + mj + k$ είναι πρώτος.

Όμως,

$$i + mj + k = p - j + mj = p + (m-1)j,$$

οπότε, για $m = p+1$, προκύπτει ο αριθμός

$$i + mj + k = p + (p+1-1)j = p(j+1),$$

ο οποίος δεν μπορεί να είναι πρώτος, αφού είναι το γινόμενο δύο αριθμών μεγαλύτερων ή ίσων του 2.

Θεώρημα: Έστω M πεπερασμένο αυτόματο με n καταστάσεις και $L(M)$ η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το L. Τότε:

(*i*) $L(M) = \varnothing$ αν και μόνον αν το M αναγνωρίζει μια λέξη x μήκους $|x| \leqslant n$,

(*ii*) $L(M)$ έχει άπειρο πλήθος λέξεων αν και μόνον αν το M αναγνωρίζει μια λέξη x μήκους $n \leqslant |x| < 2n$.

2.4.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΓΛΩΣΣΩΝ

Θεώρημα: Ισχύουν τα εξής:

(1) Οι κανονικές γλώσσες είναι κλειστές ως προς την ένωση, τη συνένωση και την κλειστότητα Kleene.

(2) Οι κανονικές γλώσσες είναι κλειστές ως προς το συμπλήρωμα και την τομή.

Απόδειξη (1): ορισμός κανονικών γλωσσών.
Απόδειξη (2): ισοδυναμία κανονικών γλωσσών με πεπερασμένα αυτόματα.

Κατασκευή των Αυτομάτων για το Συμπλήρωμα και την Τομή Κανονικών Γλωσσών:

Έστω L, L_1, L_2 κανονικές γλώσσες. Σ' αυτές αντιστοιχούν τα ΝΠΑ M, M_1, M_2, που αναγνωρίζουν τις L, L_1, L_2 (αντίστοιχα). Θεωρούμε ότι $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $M_i =$

$(Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{0i}, F_i), i = 1, 2.$

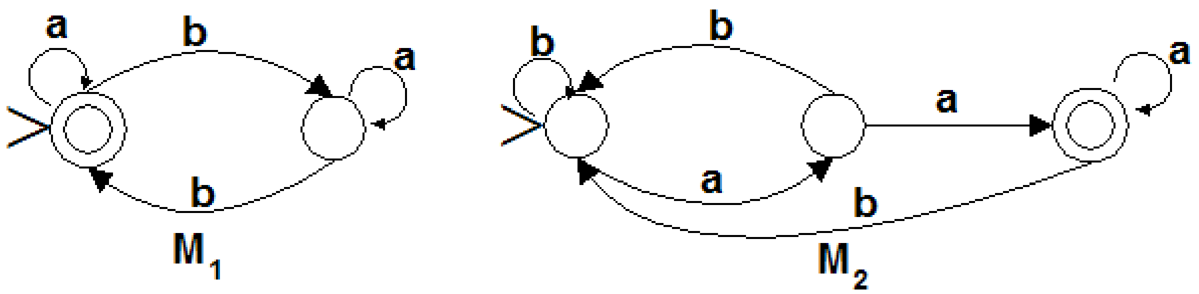
Τότε το ΝΠΑ $(Q, \Sigma, \delta, q_0, \overline{F})$, όπου $\overline{F} = Q \setminus F$, αναγνωρίζει την $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$, δηλαδή, η $\overline{L}$ είναι κανονική γλώσσα.

Το ΝΠΑ $\left(Q_1 \times Q_2, \Sigma, \widetilde{\delta}(q_{01}, q_{02}), F_1 \times F_2\right)$ αναγνωρίζει την $L_1 \cap L_2$ (που, έτσι, είναι κανονική γλώσσα), όπου

$$\widetilde{\delta}\left((p_1, p_2), \sigma\right) = \left(\delta_1(p_1, \sigma), \delta_2(p_2, \sigma)\right), p_1 \in Q_1, p_2 \in Q_2.$$

Επιπλέον, το $\left(Q_1 \times Q_2, \Sigma, \widetilde{\delta}(q_{01}, q_{02}), F_1 \setminus F_2\right)$ αναγνωρίζει την $L_1 \setminus L_2$ (που, έτσι, είναι κανονική γλώσσα).

Παράδειγμα Έστω τα ΝΠΑ:



Να βρεθούν οι γλώσσες $L(M_1)$ και $L(M_2)$ που τα αναγνωρίζουν και τα ΝΠΑ που αναγνωρίζουν τις γλώσσες $L(M_1) \cap L(M_2)$ και $L(M_1) \setminus L(M_2)$.

Προφανώς:

$$L(M_1) = \{\text{άρτιος αριθμός } b\},$$
$$L(M_2) = \{\text{τελειώνουν σε } aa\}.$$

Πίνακες μετάβασης στα σύνολα καταστάσεων $Q_1 = \{0, 1\}$ και $Q_2 = \{0, 1, 2\}$:

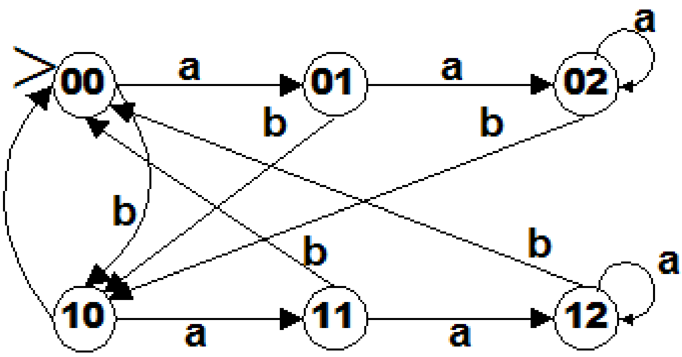
q_1	$\delta_1(q_1, a)$	$\delta_1(q_1, b)$
0	0	1
1	1	0

q_2	$\delta_2(q_2, a)$	$\delta_2(q_2, b)$
0	1	0
1	2	0
2	2	0

Πίνακας μετάβασης στο $Q_1 \times Q_2$:

q	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
00	01	10
01	02	10
02	02	10
10	11	00
11	12	00
12	12	00

Τελικές καταστάσεις: Για την $L(M_1) \cap L(M_2)$ είναι η 02 και για την $L(M_1) \setminus L(M_2)$ είναι οι $00, 01$.



Το Θεώρημα Myhill-Nerode

Ορισμός: Έστω L μια γλώσσα στο αλφάβητο Σ. Στην Σ^* ορίζουμε μια σχέση R_L ως εξής:

$$\begin{aligned} & x, y \in \Sigma^* \text{ είναι } xR_Ly \Leftrightarrow \\ & \quad \forall z \in \Sigma^*, \text{ είτε και τα δυο τα } xz \text{ και } yz \text{ ανήκουν στην } L \\ & \quad \text{είτε και τα δυο δεν ανήκουν στην } L. \end{aligned}$$

Τότε η R_L είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα Myhill-Nerode: Μια γλώσσα L είναι κανονική αν και μόνον αν η σχέση ισοδυναμίας R_L έχει πεπερασμένο πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας. Επιπλέον, αν η L είναι κανονική, τότε η γλώσσα L ταυτίζεται με την ένωση κάποιων από τις κλάσεις ισοδυναμίας της.

Παράδειγμα 1: Η γλώσσα $L = \{a^n b^n \colon n \geqslant 1\}$ δεν είναι κανονική, διότι τα $a, aa, aaa, \ldots$ ανήκουν όλα σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας, αφού αν a^n, a^m ανήκαν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, τότε $a^n z$ και $a^m z$, για κάθε $z \in (a+b)^*$, είτε και τα δυο θα ανήκαν στην L (που δεν ισχύει για $z = a$) είτε και τα δυο δεν θα ανήκαν στη L (που δεν ισχύει για $z = b^n$ ή $z = b^m$).

Παράδειγμα 2: Η γλώσσα $L = \{a^n b a^n \colon n \geqslant 1\}$ δεν είναι κανονική, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, για την άπειρη ακολουθία $ab, aab, aaab, \ldots$.

Παράδειγμα 3: Η γλώσσα L όλων των παλίνδρομων λέξεων δεν είναι κανονική, λόγω πάλι της $ab, aab, aaab, \ldots$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι κανονικές :

- (i) $\{b^m a^n b^{m+n} : m, n \geqslant 0\}$,
- (ii) $\{x \in \{0,1\}^* :$ ο αριθμός των 0 είναι μικρότερος από το διπλάσιο του αριθμού των $1\}$,
- (iii) $\{a^n b a^m b a^{n+m} : n, m \geqslant 1\}$,
- (iv) $\{x \in \{0,1\}^* :$ τα x δεν έχουν 3 διαδοχικά $0\}$,
- (v) $\{x \in \{0,1\}^* :$ τα x έχουν ίσο πλήθος 0 και $1\}$,
- (vi) $\{x w x^R : x, w \in (0+1)^+\}$,
- (vii) $\{x x^R w : x, w \in (0+1)^+\}$.

2. Ποιές από τις παρακάτω γλώσσες είναι κανονικές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- (i) $\{a^{2n} : n \geqslant 0\}$,
- (ii) $\{a^{n^2} : n \geqslant 0\}$,
- (iii) $\{x \in \{0,1\}^* :$ ο αριθμός των 0 είναι τετράγωνο κάποιου αριθμού$\}$,
- (iv) $\{x \in \{0,1\}^* : x$ **όχι** παλινδρομική λέξη$\}$,
- (v) $\{xx : x \in \{0,1\}^*\}$,
- (vi) $\{x x^R : x \in \{0,1\}^*\}$,
- (vii) $\{x \in \{0,1\}^* :$ ο αριθμός των 0 και 1 διαιρείται με $4\}$,
- $(viii)$ $\{a^n b^{2n} : n \geqslant 1\}$,
- (ix) $\{(ab)^n : n \geqslant 1\}$,

  Στα επόμενα παραδείγματα, έστω L μια τυχούσα γλώσσα.
- (x) $\{xy : yx \in L$ για $x, y \in L\}$,
- (xi) $\{x :$ για $x \in L$ τ.ώ. $\nexists y \in L, y \neq \varepsilon,$ με $xy \in L\}$,
- (xii) $\{x :$ για $x \in L$ τ.ώ. $\nexists y \in L, y \neq \varepsilon,$ με $yx \in L\}$,
- $(xiii)$ $\{x :$ για κάποιο $y \in L, xy \in L\}$.

3. Αποδείξτε (i) με το Λήμμα της Άντλησης και (ii) με το Θεώρημα (Myhill-Nerode) ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι κανονικές:

- (i) $\{a^n b^{n+1} : n \geqslant 1\}$,
- (ii) $\{a^n b^n a^n : n \geqslant 1\}$,
- (iii) $\{a^n b^{2n} : n \geqslant 1\}$,
- (iv) $\{a^n b a^n : n \geqslant 1\}$,
- (v) $\{a^n b^n a^m : n, m \geqslant 0\}$,
- (vi) $\{a^{n^2} b^{n^2} : n \geqslant 1\}$,
- (vii) $\{a^p b^q : p, q$ πρώτος$\}$,
- $(viii)$ $\{a^{n!} b^{n!} : n \geqslant 1\}$,
- (ix) $\{a^n b^n c^n : n \geqslant 1\}$.