2.2 ΝΤΕΤΕΡΜΕΝΙΣΤΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Ορισμός: Ένα **ντετερμενιστικό πεπερασμένο αυτόματο** είναι μια πεντάδα $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, όπου:

- Q είναι ένα (πεπερασμένο) σύνολο **καταστάσεων**,
- Σ είναι ένα αλφάβητο,
- δ είναι η **συνάρτηση μετάβασης** $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$,
- $q_0 \in Q$ είναι η **αρχική κατάσταση**,
- $F \subset Q$ είναι το σύνολο των **τελικών καταστάσεων**.

Παρατήρηση - Συμβολισμοί:

* Μερικές φορές, στη συνέχεια, θα λέμε **αυτόματο** και θα εννοούμε "ντετερμενιστικό πεπερασμένο αυτόματο".

* Κάθε αυτόματο θα συμβολίζεται σαν **κατευθυνόμενος γράφος**, στον οποίον:

- οι κόμβοι (συμβολιζομένοι σαν $\bigcirc$ ή j ή q_j) είναι οι καταστάσεις,
- η αρχική κατάσταση συμβολίζεται σαν $>\!\bigcirc$,
- οι τελικές καταστάσεις συμβολίζονται με $\circledcirc$,
- πάνω στο τόξο $q_i \to q_j$ γράφεται το $\sigma \in \Sigma$ έτσι ώστε $\delta(q_i, \sigma) = q_j$.

Τα αυτόματα χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση των κανονικών γλωσσών. Αυτό επιτυγχάνεται με την τροφοδοσία τυχαίων λέξεων στο αυτόματο, από τις οποίες εκείνες που καταλήγουν στις τελικές καταστάσεις είναι μόνο οι λέξεις της γλώσσας που αναγνωρίζει το αυτόματο.

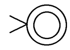
Έτσι θα προσπαθούμε να επιτύχουμε τα εξής:

(i) δοθείσης μιας γλώσσας να βρούμε το αυτόματο που την αναγνωρίζει,

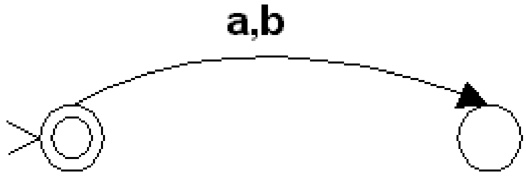
(ii) δοθέντος ενός αυτομάτου να βρούμε τη γλώσσα που αυτό αναγνωρίζει.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θεωρούμε πάντα το αλφάβητο $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$.

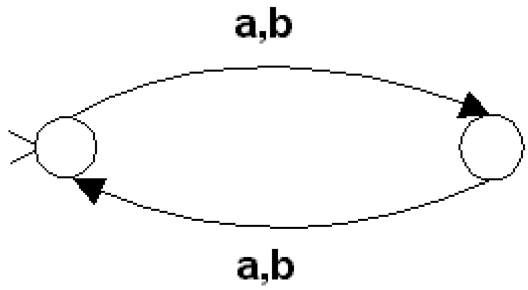
Παράδειγμα 1: Έστω η γλώσσα L με λέξεις που αποτελούνται από άρτιο αριθμό συμβόλων (ή κανένα). Προφανώς, η κανονική έκφραση της γλώσσας αυτής είναι $L = (aa + ab + ba + bb)^*$. Εφόσον η κενή λέξη ε είναι αποδεκτή, έχουμε την αρχική κατάσταση να είναι ταυτόχρονα και τελική κατάσταση, δηλαδή:



Επειδή λέξεις με ένα σύμβολο απορρίπτονται, έχουμε και μια δεύτερη κατάσταση που δεν είναι τελική:



Προφανώς, λέξεις με δυο σύμβολα επιστρέφουν στην αρχική/τελική κατάσταση. Επομένως, το ζητούμενο αυτόματο είναι:

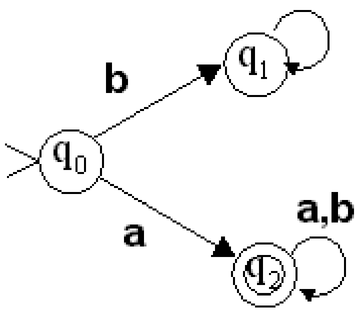


με συνάρτηση μετάβασης όπως στον εξής πίνακα:

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
q_0	q_1	q_1
q_1	q_0	q_0

Παράδειγμα 2: Έστω η γλώσσα L που αποτελείται από λέξεις που αρχίζουν με το α. Τώρα, $L = (a(a+b)^*$.

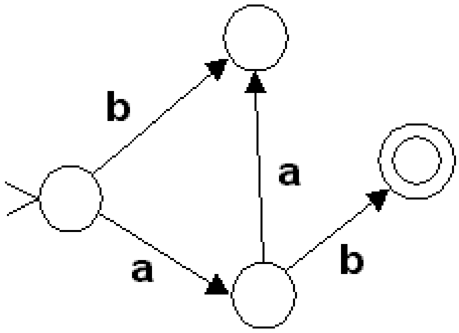
Ξεκινώντας από μια αρχική κατάσταση, πάμε στην τελική κατάσταση, αν το πρώτο σύμβολο είναι a κι αλλιώς πάμε σε μία τρίτη (άγονη) κατάσταση. Επομένως, το αυτόματο είναι:



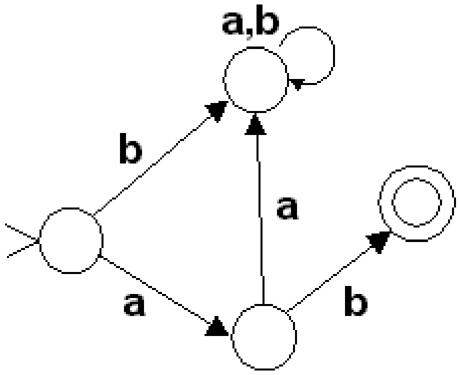
q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

Παράδειγμα 3: Έστω η γλώσσα $L = (ab)^+$, που αποτελείται από ένα πλήθος συνενωμένων ab.

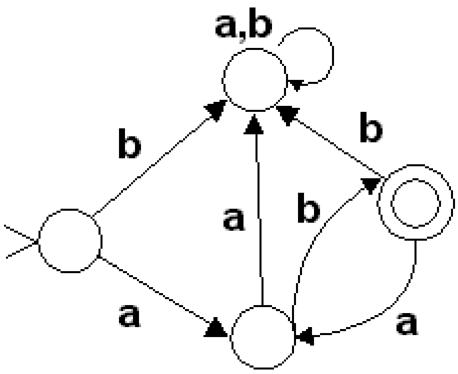
Προφανώς, αν μια λέξη αρχίζει με b, αυτή πρέπει να πηγαίνει σε άγονη κατάσταση, όπως και όταν αρχίζει με aa. Αλλά, αν είναι η λέξη ab, πρέπει να πηγαίνει στην τελική κατάσταση:



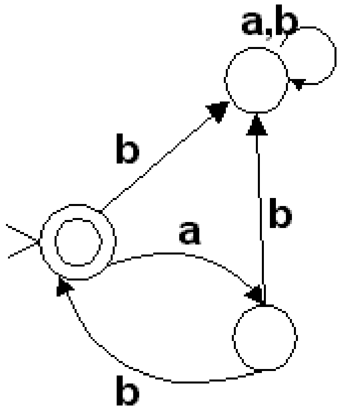
Άπαξ και φτάσουμε στην άγονη κατάσταση, μένουμε εκεί:



Τι γίνεται τώρα με λέξεις που αρχίζουν από ab: Προφανώς, οι λέξεις abb... πηγαίνουν στην άγονη κατάσταση, ενώ οι λέξεις aba... πηγαίνουν στην ενδιάμεση κατάσταση. Έτσι, το αυτόματο γίνεται:

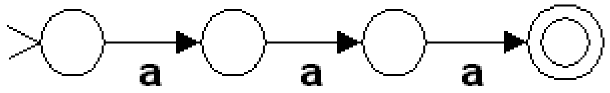


Παράδειγμα 4: Αν τώρα $L = (ab)^*$, (δηλαδή, όπως προηγουμένως αλλά μαζί με την κενή λέξη), τότε υποχρεωτικά η αρχική κι η τελική κατάσταση ταυτίζονται:

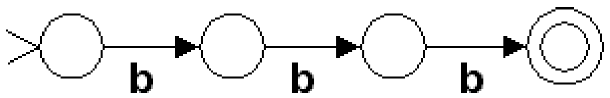


Παράδειγμα 5: Έστω η γλώσσα L που αποτελείται από λέξεις με τρία συνεχόμενα a ή τρία συνεχόμενα b. Προφανώς, $L = (a+b)^*(aaa+bbb)(a+b)^*$.

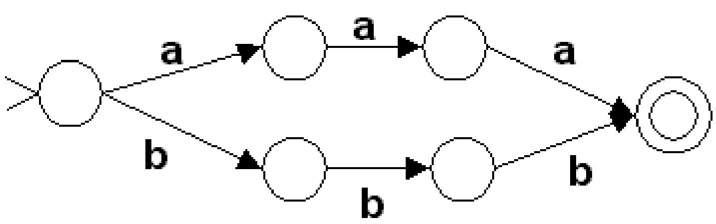
Για να γίνεται αποδεκτή η λέξη aaa, πρέπει να υπάρχει το εξής μονοπάτι:



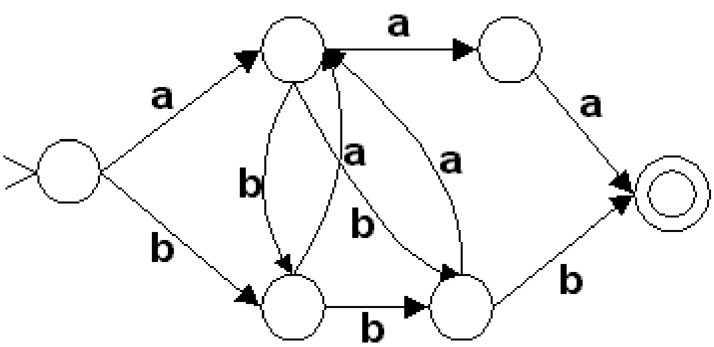
και για την bbb το εξής:



Επομένως, και τα δυο μαζί:

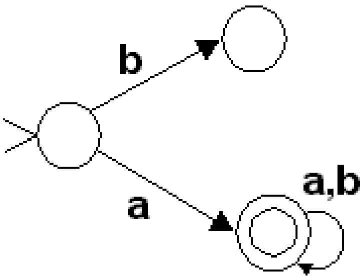


Αν τώρα είμαστε στο μονοπάτι του a και εμφανισθεί b πρίν το τρίτο a, πρέπει να πάμε στο μονοπάτι των b (κι αντιστρόφως). Έτσι, το ζητούμενο αυτόματο είναι:

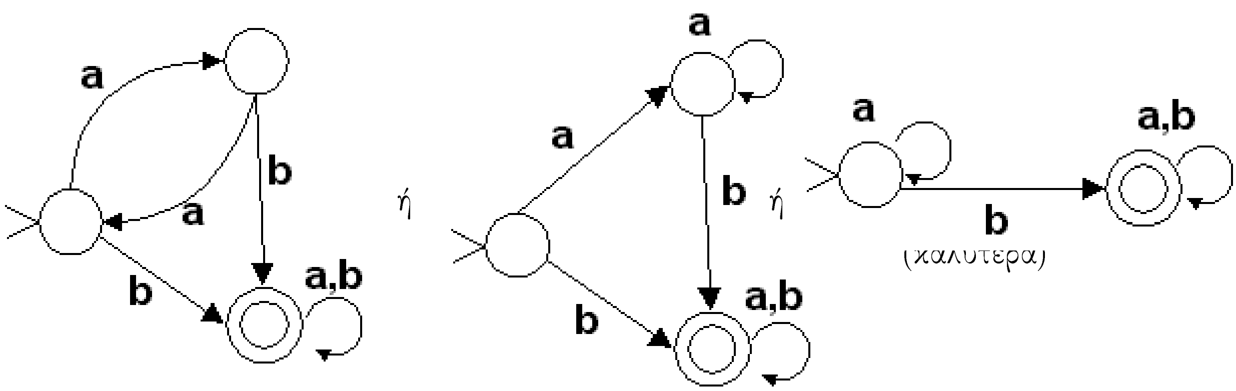


Παράδειγμα 6: Έστω η γλώσσα L με όλες τις λέξεις της να περιέχουν οπωσδήποτε το b. Δηλαδή, $L = (a+b)^*b(a+b)^*$.

Τότε, από την αρχική κατάσταση μπορούμε να πάμε είτε στην τελική κατάσταση, αν η λέξη αρχίζει με b, ή σε μία ενδιάμεση κατάσταση, αν η λέξη αρχίζει με a. Προφανώς, στην πρώτη περίπτωση μένουμε εκεί. Έτσι, έχουμε τα μονοπάτια:

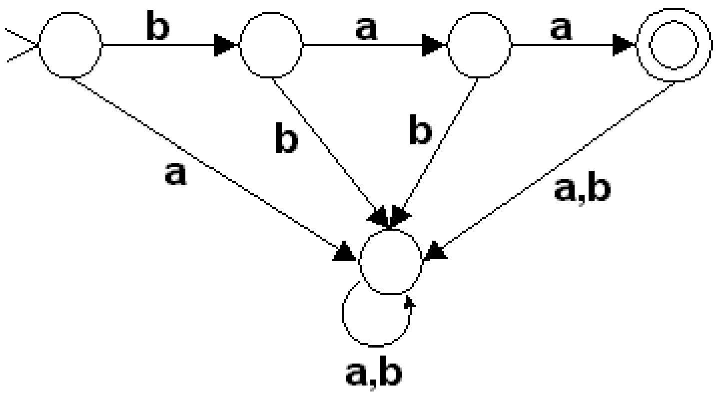


Το τι γίνεται μετά την ενδιάμεση κατάσταση, εξαρτάται από το δεύτερο στη σειρά σύμβολο μετά το a. Λέξεις aa... επιστρέφουν στην αρχική κατάσταση, ενώ λέξεις ab... πάνε αυτόματα στην τελική κατάσταση. Επομένως, το αυτόματο είναι:

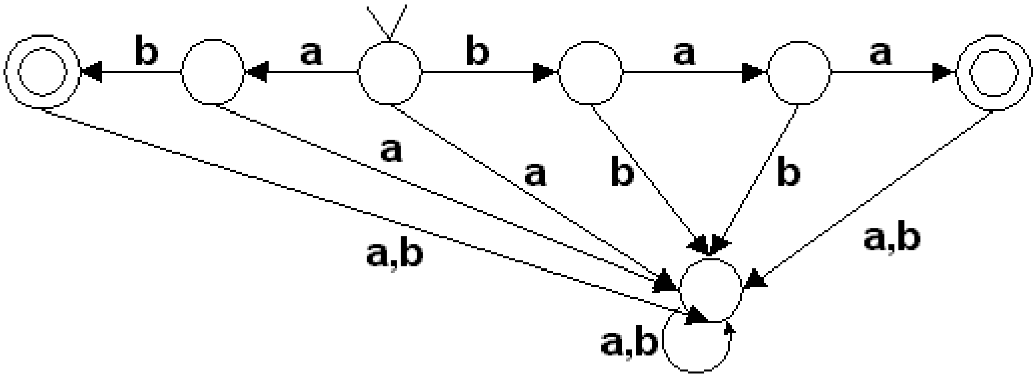


Παράδειγμα 7: Έστω (i) η μονολεκτική γλώσσα $L = \{baa\}$ και (ii) η διλεκτική γλώσσα $L = \{baa, ab\}$.

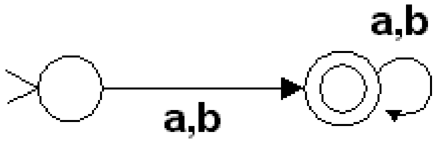
(i) Προφανώς, μόνο το μονοπάτι baa συνδέει την αρχική κατάσταση με την τελική, ενώ όλες οι άλλες περιπτώσεις πέφτουν σε μια άγονη κατάσταση. Άρα, το αυτόματο είναι:



(ii) Προσθέτουμε και το 'γόνιμο' μονοπάτι ab:

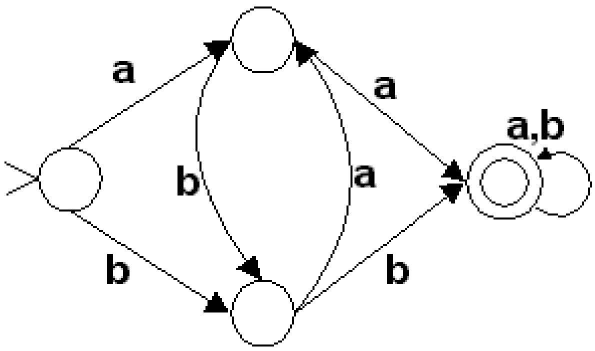


Παράδειγμα 8: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:



Προφανώς, όλες οι λέξεις που αρχίζουν είτε από a είτε από b τερματίζουν. Μόνο η κενή λέξη ε δεν αναγνωρίζεται. Επομένως, $L = (a + b)^+$.

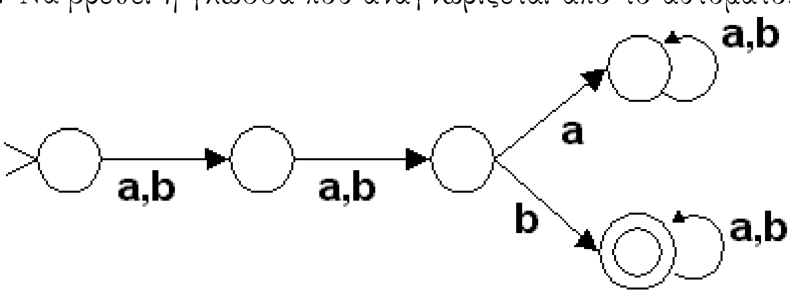
Παράδειγμα 9: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:



Λέξεις που τερματίζουν: $aa\ldots, abb\ldots, bb\ldots, baa\ldots$.

Συνεπώς, η L αποτελείται από όλες τις λέξεις που περιέχουν το aa ή το bb, δηλαδή: $L = (a + b)^*(aa + bb)(a + b)^*$.

Παράδειγμα 10: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:

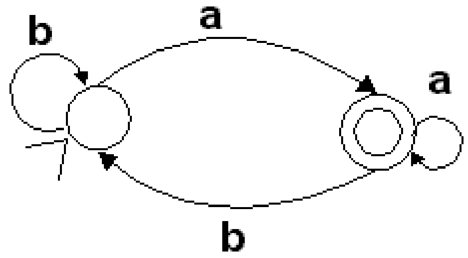


Λέξεις που τερματίζουν: $aab\ldots, abb\ldots, bab\ldots, bbb\ldots$.

Λέξεις που δεν τερματίζουν: κάθε λέξη με κανένα, ένα ή δυο σύμμβολα, $aaa\ldots, aba\ldots, baa\ldots, bba\ldots$.

Επομένως, $L = (aab + abb + bab + bbb)(a + b)^*$.

Παράδειγμα 11: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:

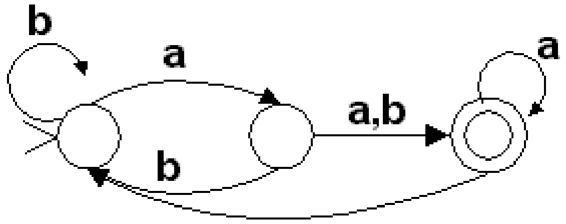


Λέξεις που τερματίζουν: a^m, $m \geq 1$, $b^n a^m$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, $a^m b^n a^p$, $m, n, p \geq 1$, $b^q a^m b^n a^p$, $m, n, p \geq 1$, $q \geq 0$.

Λέξεις που δεν τερματίζουν: $b^m a b^n$, $n \geq 1$, $m \geq 0$.

Άρα, οι λέξεις που τερματίζουν (αναγνωρίζονται) πρέπει υποχρεωτικά να τελειώνουν σε $a \Rightarrow L = (a+b)^* a$.

Παράδειγμα 12: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:

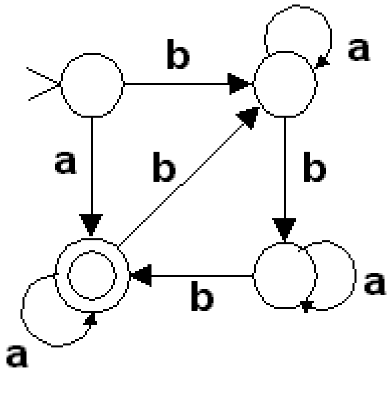


Λέξεις που τερματίζουν: $b^n aaa^m$, $n, m \geq 0$, $(b^n aba)^p aa^m$, $n, m, p \geq 0$, $b^n ab^p aaa^m$, $n, m \geq 0$, $p \geq 1$.

Λέξεις που δεν τερματίζουν: b^n, $n \geq 1$, $b^n ab^m$, $n \geq 0$, $m \geq 1$.

Άρα, οι λέξεις που τερματίζουν είναι αυτές που τελειώνουν σε δυο a $(aa) \Rightarrow L = (a+b)^* aa$.

Παράδειγμα 13: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:



Λέξεις που τερματίζουν: a^m, $m \geq 1$, $ba^m ba^p ba^q$, $m, p, q \geq 0$, $a^m ba^p ba^q ba^k$, $m \geq 1$, $p, q, k \geq 0$.

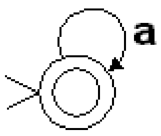
Λέξεις που δεν τερματίζουν: $a^m ba^p$, $m \geq 1$, $p \geq 0$, $a^m ba^p ba^q$, $m \geq 1$, $p, q \geq 0$, ba^m, $m \geq 0$, $ba^m ba^q$, $m, q \geq 0$.

Άρα, οι λέξεις που τερματίζουν είναι είτε a^m $(m \geq 1)$ ή έχουν συνολικό πλήθος των b διαιρετό με το 3. Επομένως: $L = a^*(a^*ba^*ba^*ba^*)^*(a + a^*ba^*ba^*ba^*)$.

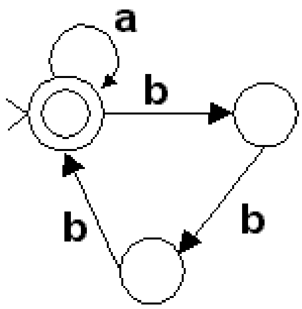
Ο λόγος που μπήκε ο παράγοντας $(a + a^*ba^*ba^*ba^*)$ είναι για να αποκλεισθεί η κενή λέξη ε.

Παράδειγμα 14: Ας κατασκευάσουμε το αυτόματο που αντιστοιχεί στην γλώσσα του προηγούμενου παραδείγματος, μαζί όμως με την κενή λέξη, δηλαδή, $L = a^*(a^*ba^*ba^*ba^*)^*$, που είναι η γλώσσα με λέξεις είτε a^m $(m \geq 0)$ ή που έχουν συνολικό πλήθος των b διαιρετό με το 3.

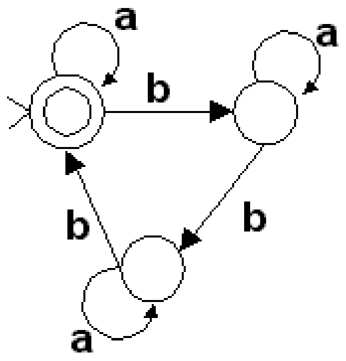
Επειδή $\varepsilon \in L$, αρχική και τελική κατάσταση ταυτίζονται. Επιπλέον, $a^m \in L$ $(m \geq 0)$:



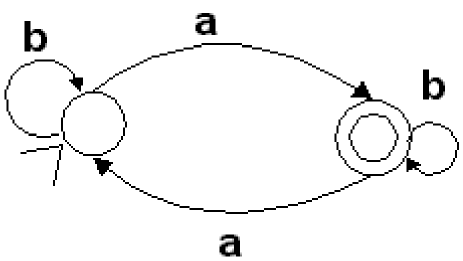
Για να έχουμε 3 b:



Τέλος, στις ενδιάμεσες καταστάσεις τα a πρέπει να επιστρέφονται. Επομένως, το ζητούμενο αυτόματο είναι:



Παράδειγμα 15: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:

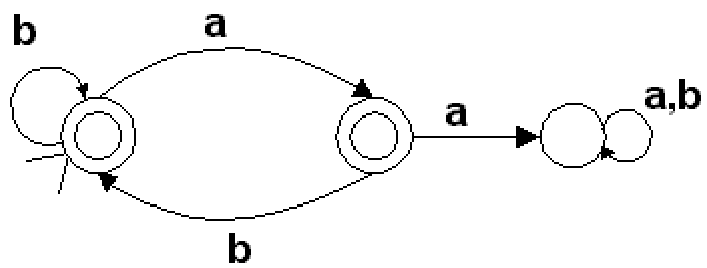


Αποδεκτές λέξεις: $b^n ab^m$, $n, m \geq 0$, $b^n ab^m ab^p ab^q$, $n, m, p, q \geq 0$.

Απορριπτέες λέξεις: b^n, $n \geq 0$, $b^n ab^m a$, $n, m \geq 0$.

Άρα, η αποδεκτή γλώσσα είναι αυτή που περιέχει λέξεις μόνο με περιττό πλήθος των a: $L = b^*ab^*(ab^*ab^*)^*$.

Παράδειγμα 16: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:

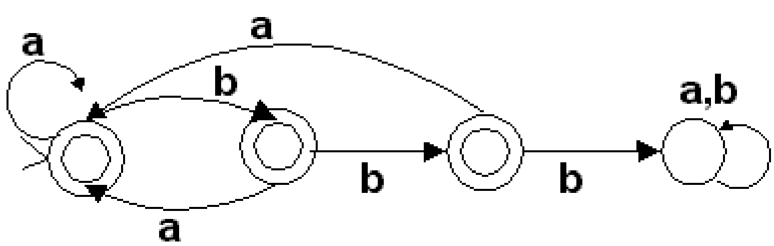


Αποδεκτές λέξεις: $b^n aaa^m b^p$, $n, m, p \geq 0$, $b^n ab^q aaa^m b^p$, $n, m, p \geq 0$, $q \geq 1$.

Απορριπτέες λέξεις: b^n, $n \geq 0$, $b^n a$, $n \geq 0$, $b^n ab^q$, $n \geq 0$, $q \geq 1$, $b^n ab^q a$, $n \geq 0$, $q \geq 1$.

Επομένως, η γλώσσα του αυτομάτου αυτού πρέπει υποχρεωτικά να έχει δυο συνεχόμενα a (aa): $L = (a+b)^* aa(a+b)^*$.

Παράδειγμα 17: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:

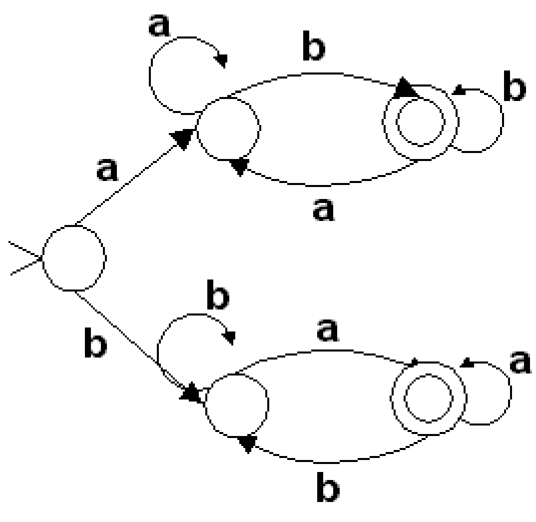


Αποδεκτές λέξεις: a^m, $a^m b$, $a^m bb$, $m \geq 0$, $a^m ba^p$, $a^m ba^p b$, $a^m ba^p bb$, $m \geq 0$, $p \geq 1$, $a^m bba^p$, $a^m bba^p b$, $a^m bba^p bb$, $m \geq 0$, $p \geq 1$, $a^m ba^q bba^p$, $a^m ba^q bba^p b$, $a^m ba^q bba^p bb$, $m \geq 0$, $p, q \geq 1$.

Απορριπτέες λέξεις: $a^m bbba^p b^n$, $m, p, n \geq 0$.

Άρα, η γλώσσα του αυτομάτου αποτελείται από τις λέξεις που δεν περιέχουν 3 συνεχόμενα b (bbb).

Παράδειγμα 18: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:

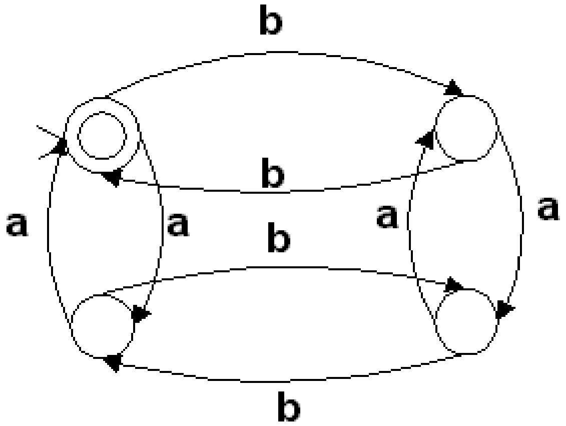


Αποδεκτές λέξεις: $a^m b^n$, $m, n \geq 1$, $a^m b^n a^p b^q$, $m, n, p, q \geq 1$, $b^n a^m$, $m, n \geq 1$, $b^n a^m b^q a^p$, $m, n, p, q \geq 1$.

Απορριπτέες λέξεις: a^m, $m \geq 0$, $a^m b^n a^p$, $m, p, n \geq 1$, b^n, $n \geq 0$, $b^n a^m b^q$, $m, n, q \geq 1$.

Άρα, η γλώσσα του αυτομάτου αυτού αποτελείται από λέξεις με διαφορετικό αρχικό σύμβολο από το τελικό, δηλαδή, είτε αρχίζουν με a και τελειώνουν με b ή αρχίζουν με b και τελειώνουν με a.

Παράδειγμα 19: Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αυτόματο:



Αποδεκτές λέξεις: ε, aa, a^n, bb, b^m, m, n άρτιοι, $a^p b^m a^q$, p, q περιττοί, m άρτιος, $a^p b^k a^q b^l$, p, q, k, l περιττοί.

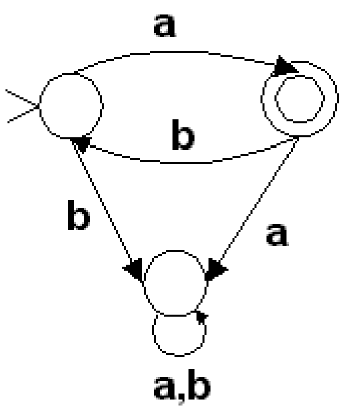
Απορριπτέες λέξεις: a^m, m περιττός, b^n, n περιττός, $a^m b^n$, m περιττός, n άρτιος ή περιττός, $b^n a^m$, n περιττός, m άρτιος ή περιττός.

Επομένως, η ζητούμενη γλώσσα είναι εκείνη που αποτελείται μόνο από λέξεις με άρτιο πλήθος των a (ή κανένα a) και με άρτιο πλήθος των b (ή κανένα b).

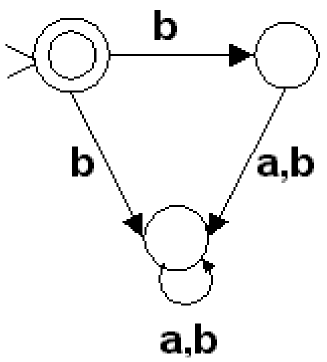
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι γλώσσες που αναγνωρίζονται από τα εξής αυτόματα:

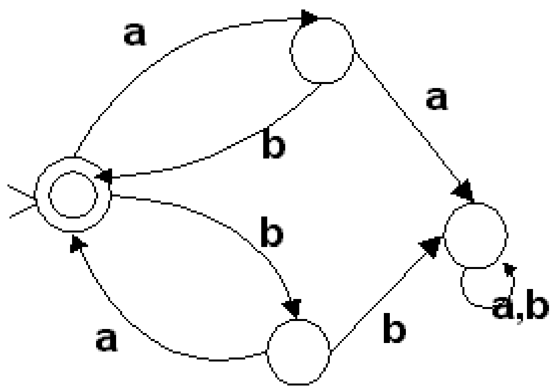
(i)



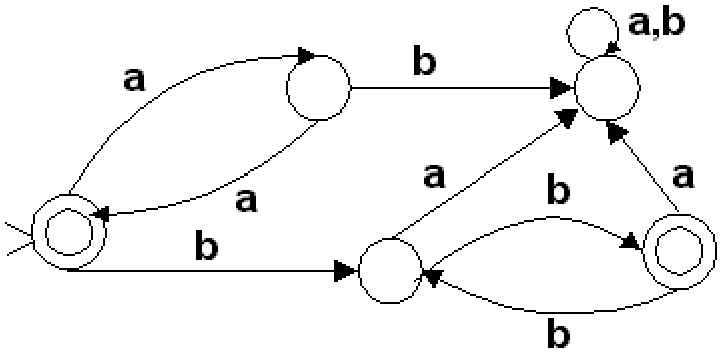
(ii)



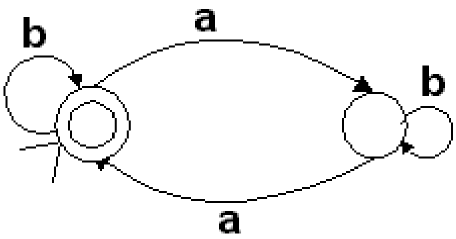
(iii)



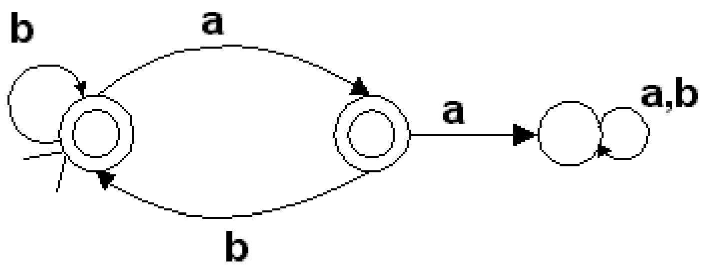
(iv)



(v)



(vi)



2. Σχεδιάστε τα αυτόματα για τις εξής γλώσσες:

(i) $L = a^*b(a+b)^*$,

(ii) $L = \{baa, ab, abb\}$,

(iii) $L = (a+ab)^*$,

(iv) $L = (a+b)^*(aa+ab+bb)$,

(v) L είναι η γλώσσα όλων των λέξεων που αρχίζουν ή τελειώνουν με διπλό σύμβολο,

(vi) L είναι η γλώσσα όλων των λέξεων που περιέχουν μόνο ένα άρτιο πλήθος του ab.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1(i) $a + (aba)^*$,

1(ii) ε,

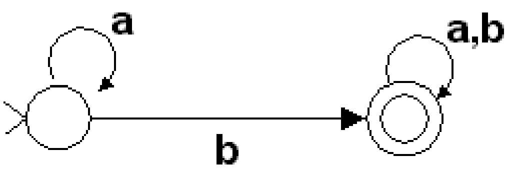
1(iii) $(ab + ba)^*$,

1(iv) $(aa)^* + (bb)^* + (aa)^*(bb)^*$,

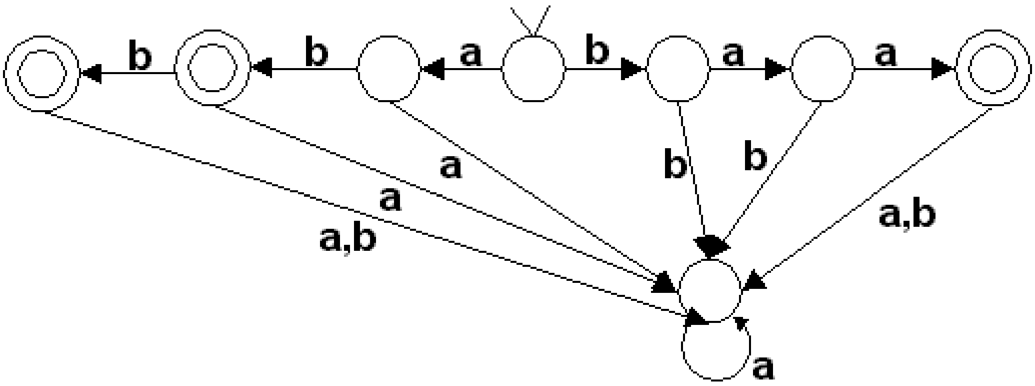
1(v) $(b + ab^*a)^*$,

1(iv) $a + b^*(ab)^*$.

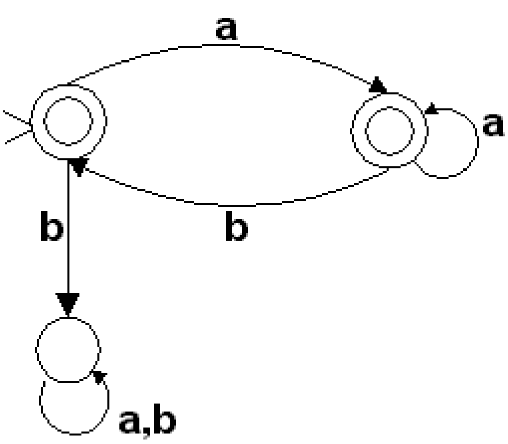
2(i)



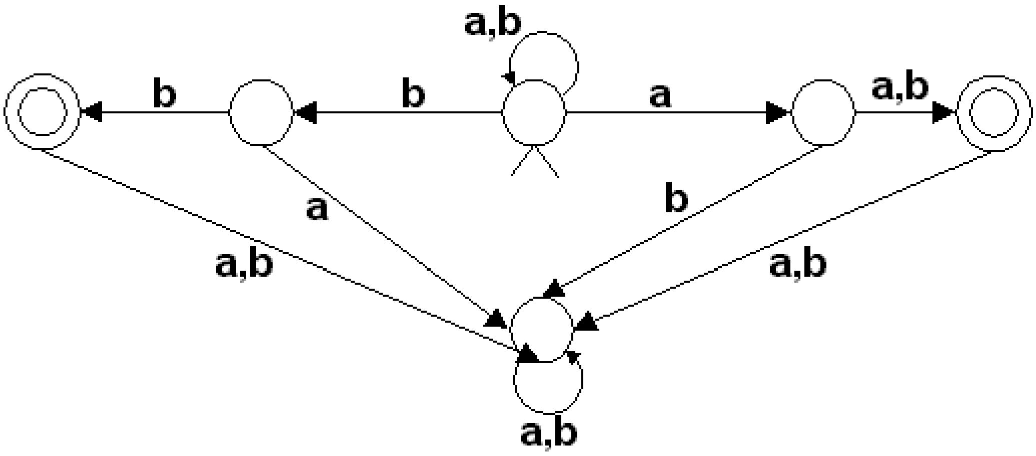
2(ii)



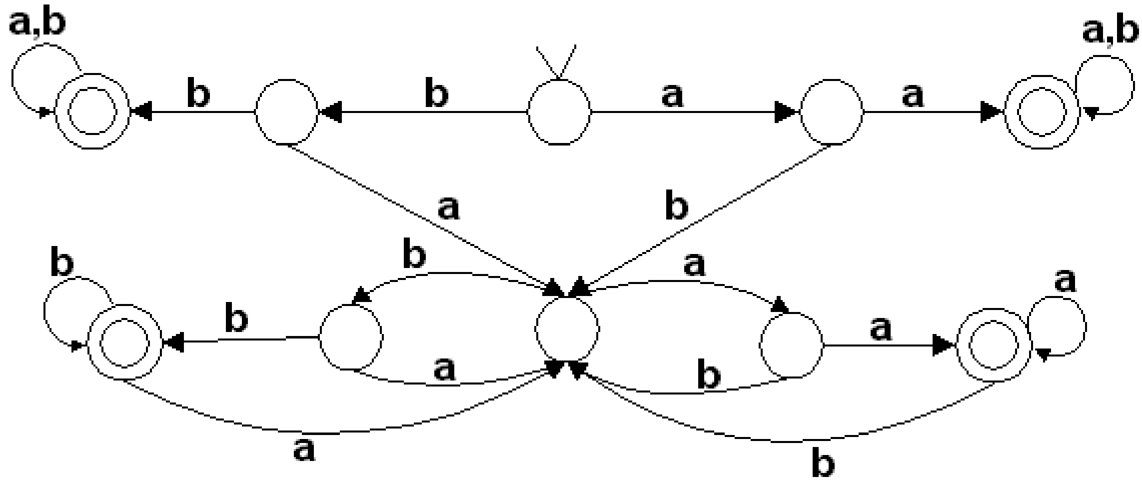
2(iii)



2(iv)



2(v)



2(vi)