3.5 ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΣΤΟΙΒΑΣ

Ορισμός: Ένα **αυτόματο στοίβας** (ΑΣ) (Pushdown Automaton) είναι μια επτάδα $M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\}$, όπου:

- Q είναι ένα (πεπεραασμένο) σύνολο καταστάσεων,
- Σ είναι το **αλφάβητο εισόδου**,
- Γ είναι το **αλφάβητο στοίβας**,
- δ είναι η συνάρτηση μετάβασης:

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \text{ πεπερασμένα υποσύνολα του } Q \times \Gamma^*,$$

- $q_0 \in Q$ η αρχική κατάσταση,
- $Z_0 \in \Gamma$ η αρχική κατάσταση στοίβας,
- $F \subset Q$ το σύνολο των τελικών καταστάσεων.

Κινήσεις - Μεταβάσεις Αυτομάτου Στοίβας

Η συνάρτηση μετάβασης δημιουργεί σχέσεις μιας από τις παρακάτω δυο μορφές: είτε

$$\delta(q, \sigma, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}, \tag{I}$$

ή

$$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}, \tag{II}$$

για $q, p_1, \ldots, p_m \in Q, \sigma \in \Sigma, Z \in \Gamma$ και $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Gamma^*$.

Η (I) σημαίνει το εξής για το πώς το ΑΣ κινείται ξεκινώντας από την κατάσταση q: Όταν το ΑΣ βρίσκεται στην κατάσταση q, διαβάζει το σ (σαν το πρώτο αριστερά σύμβολο της λέξης που περνά από το αυτόματο και βρίσκεται τότε στην κατάσταση q) και το σύμβολο Z βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας, τότε, για κάθε i, το αυτόματο οδηγεί στην κατάσταση p_i, αντικαθιστώντας το σύμβολο στοίβας Z με τη συμβολοσειρά γ_i.

Η (II) σημαίνει το εξής για το πώς το ΑΣ κινείται ξεκινώντας από την κατάσταση q: Όταν το ΑΣ βρίσκεται στην κατάσταση q, χωρίς να διαβάσει κανένα σύμβολο της Σ, οδηγεί, για κάθε i, στην κατάσταση p_i αντικαθιστώντας το Z με την γ_i.

Παρατήρηση: Επειδή οι τιμές της συνάρτησης μετάβασης είναι σύνολα, προφανώς, το ΑΣ είναι ένα *μη ντετερμενιστικό αυτόματο*. Εννοείται ότι σε κάθε κίνηση επιλέγεται μια τιμή από το σύνολο τιμών της συνάρτησης μετάβασης δ, δηλαδή, ένα (p_j, γ_j) στο δεξιό μέρος της δ. Έτσι, χρησιμοποιείται ο εξής συμβολισμός:

$$q \xrightarrow{\sigma|Z,\gamma} p \quad \text{σημαίνει} \quad \delta(q,\sigma,Z) \ni (p,\gamma).$$

Με άλλα λόγια, ο συμβολισμός "$\sigma|Z,\gamma$" πάνω από το βέλος της μετάβασης σημαίνει ότι καθώς διαβάζουμε το σ σαν το σύμβολο που βρίσκεται πρώτο αριστερά στη λέξη, αλλάζουμε το σύμβολο Z, που βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας, με τη συμβολοσειρά γ. Επομένως:

- "$\sigma|Z,\varepsilon$" σημαίνει ότι βγάζουμε το σύμβολο Z από την κορυφή της στοίβας,
- "$\sigma|\varepsilon,Z$" σημαίνει ότι βάζουμε το σύμβολο Z στην κορυφή της στοίβας και
- "$\sigma|\varepsilon,\varepsilon$" σημαίνει ότι αφήνουμε τη στοίβα έτσι όπως είναι – χωρίς καμιά αλλαγή.

Στιγμιαίες Περιγραφές

Δοθέντος ότι ένα ΑΣ τροφοδοτείται με λέξεις (ή καλύτερα συμβολοσειρές), τις οποίες προσπαθεί να αναγνωρίσει (αν ανήκουν σε συγκεκριμένη γλώσσα), καθώς κάθε λέξη περνά από μια κατάσταση του ΑΣ σε μια άλλη, ο παρακάτω ορισμός είναι πολύ χρήσιμος για την κατανόηση της λειτουργίας του ΑΣ:

Ορισμός: Μια **στιγμιαία περιγραφή (ΣΠ)** ενός ΑΣ είναι μια τριάδα (q,w,γ), όπου $q \in Q, w \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^*$ είναι τέτοια ώστε, όταν το ΑΣ βρίσκεται στην κατάσταση q, w είναι το τμήμα της συμβολοσειράς εισόδου που απομένει να διαβαστεί και γ είναι τα περιεχόμενα του σωρού με το αριστερό σύμβολο του γ να βρίσκεται στην κορυφή του σωρού.

Συμβολισμοί Παραγωγών:

Λέμε ότι η ΣΠ $(q,\sigma w,Z\alpha)$ **παράγει σε ένα βήμα** τη ΣΠ $(p,w,\gamma\alpha)$ και συμβολίζουμε την παραγωγή αυτή με το "$\vdash$":

$$(q,\sigma w,Z\alpha) \vdash (p,w,\gamma\alpha) \text{ αν } \delta(q,\sigma,Z) \ni (p,\gamma),$$

δηλαδή, αν, όταν το ΑΣ βρίσκεται στην κατάσταση q, διαβάζει το σ (μπορεί $\sigma=\varepsilon$) κι έχει το Z στην κορυφή της στοίβας, τότε πάει στην κατάσταση p κι αντικαθιστά το Z με τη συμβολοσειρά γ στην κορυφή της στοίβας. Με άλλα λόγια, για $q,p \in Q, x,y \in \Sigma^*, \eta,\theta \in \Gamma^*$,

$$(q,x,\eta) \vdash (p,y,\theta) \text{ αν } \delta(q,\sigma,Z) \ni (p,\gamma),$$

όπου σ είναι το πρώτο σύμβολο της x και Z το πρώτο σύμβολο της η.

Επίσης, λέμε ότι η ΣΠ I **παράγει** τη ΣΠ J **σε ένα ή περισσότερα βήματα** και συμβολίζουμε $I \overset{*}{\vdash} J$, αν υπάρχουν οι ΣΠ $K_1, K_2, \ldots, K_m$, για $m \geqslant 1$ τέτοιες ώστε $I \vdash K_1 \vdash \ldots \vdash K_m \vdash J$.

Αποδεκτές Γλώσσες

Ορισμός: Έστω M ένα ΑΣ και $w \in \Sigma^*$. Τότε,

(i) Λέμε ότι η w γίνεται **αποδεκτή με άδεια στοίβα** αν υπάρχει κατάσταση $p \in Q$ τέτοια ώστε

$$(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

(ii) Λέμε ότι η w γίνεται **αποδεκτή από τελικές καταστάσεις** αν υπάρχει τελική κατάσταση $f \in F$ και $\gamma \in \Gamma^*$ τέτοια ώστε

$$(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (f, \varepsilon, \gamma).$$

(iii) Η **γλώσσα που γίνεται αποδεκτή με άδεια στοίβα** $N(M)$ είναι το σύνολο όλων των $w \in \Sigma^*$ που γίνονται αποδεκτές με άδεια στοίβα, δηλαδή:

$$N(M) = \{w \in \Sigma^* : (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon), p \in Q\}.$$

(iv) Η **γλώσσα που γίνεται αποδεκτή από τελικές καταστάσεις** $L(M)$ είναι το σύνολο όλων των $w \in \Sigma^*$ που γίνονται αποδεκτές από τελικές καταστάσεις, δηλαδή:

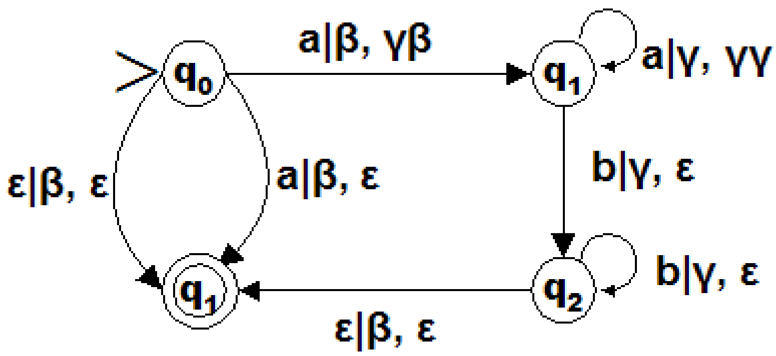
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (f, \varepsilon, \gamma), f \in F, \gamma \in \Gamma^*\}.$$

Θεώρημα: $L = L(M_1)$, για κάποιο ΑΣ M_1, αν και μόνον αν $L = N(M_2)$, για κάποιο ΑΣ M_2.

Θεώρημα: Η L είναι ΓλΑΣ αν και μόνο αν $L = N(M)$, για κάποιο ΑΣ M.

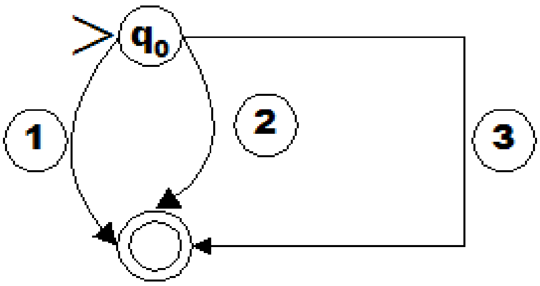
Παράδειγμα 1: Έστω το ΑΣ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ με

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_f\}, F = \{q_f\}, \\ \Sigma &= \{a, b\}, \\ \Gamma &= \{\beta, \gamma\}, Z_0 = \beta. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, \beta) &= \{(q_1, \gamma\beta), (q_f, \varepsilon)\}, \\
\delta(q_0, \varepsilon, \beta) &= (q_f, \varepsilon), \\
\delta(q_1, a, \gamma) &= (q_1, \gamma\gamma), \\
\delta(q_1, b, \gamma) &= (q_2, \varepsilon), \\
\delta(q_2, b, \gamma) &= (q_2, \varepsilon), \\
\delta(q_1, \varepsilon, \beta) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Διαδρομές τερματισμού:



Δηλαδή, βλέπουμε ότι:

(1) τερματίζει η ε,
(2) τερματίζει η a,
(3) τερματίζει η $a^n b^n$.

Άρα, η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το ΑΣ είναι η:

$$\{a^n b^n : n \geqslant 0\} \cup \{a\}.$$

Για παράδειγμα, η λέξη $aaabbb$ ακολουθεί την εξής πορεία:

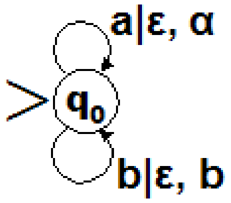
$$\begin{aligned}
(q_0, aaabbb, \beta) &\vdash (q_1, aabbb, \gamma\beta) \\
&\vdash (q_1, abbb, \gamma\gamma\beta) \\
&\vdash (q_1, bbb, \gamma\gamma\gamma\beta) \\
&\vdash (q_2, bb, \gamma\gamma\beta) \\
&\vdash (q_2, b, \gamma\beta) \\
&\vdash (q_2, \varepsilon, \beta) \\
&\vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Θα σχεδιάσουμε το ΑΣ που δέχεται τη γλώσσα

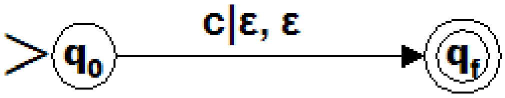
$$L = \{wcw^R \colon w \in \{a, b\}^*\}.$$

Η ιδέα: Επειδή σε κάθε λέξη της L υπάρχει στη μέση ένα c, διακρίνουμε 3 φάσεις:

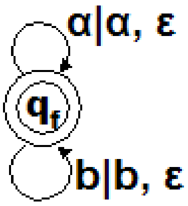
Πρώτη Φάση (μέχρι να διαβαστεί το c): Μένουμε στην αρχική κατάσταση q_0 και κάθε σύμβολο που διαβάζουμε το αποθηκεύουμε στη στοίβα:



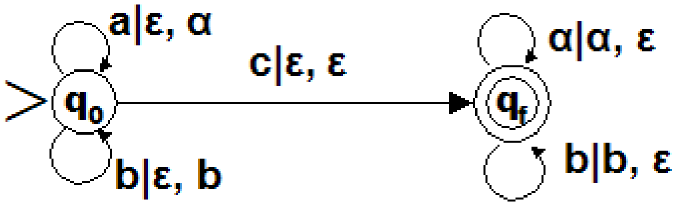
Δεύτερη Φάση (όταν έρθει η σειρά να διαβαστεί το c): Περνάμε στη τελική κατάσταση q_f χωρίς να αλλάξουμε τίποτα στη στοίβα:



Τρίτη Φάση (μετά το c): Μένουμε στην τελική κατάσταση αλλά, καθώς διαβάζεται ένα σύμβολο, αυτό πρέπει να αφαιρείται από τη στοίβα. Επομένως, οι λέξεις που τερματίζουν είναι εκείνες που έχουν το μέρος μετά το c να είναι ίδιο με το ακριβώς το παλίνδρομο του μέρους πριν το c:



Συνολικά το ΑΣ είναι:



Δηλαδή, είναι το ΑΣ:

$$
\begin{aligned}
M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F), \\
Q &= \{q_0, q_f\}, \\
\Sigma &= \{a, b, c\},\ \Gamma = \{a, b\}, \\
Z_0 &= \varepsilon,\ F = \{q_f\}, \\
\delta(q_0, a, \varepsilon) &= (q_0, a), \\
\delta(q_0, b, \varepsilon) &= (q_0, b), \\
\delta(q_0, c, \varepsilon) &= (q_f, \varepsilon), \\
\delta(q_f, a, a) &= (q_f, \varepsilon), \\
\delta(q_f, b, b) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}
$$

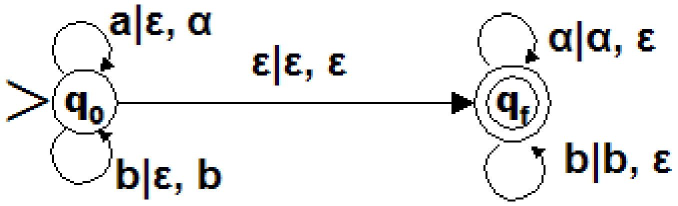
Παραγωγές ΣΠ της λέξης *abbcbba*:

$$\begin{aligned}
(q_0, abbcbba, \varepsilon) &\vdash (q_0, bbbcbba, a)\\
&\vdash (q_0, bcbba, ba)\\
&\vdash (q_0, cbba, bba)\\
&\vdash (q_f, bba, bba)\\
&\vdash (q_f, ba, ba)\\
&\vdash (q_f, a, a)\\
&\vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3: Θα σχεδιάσουμε το ΑΣ που δέχεται τη γλώσσα

$$L = \{ww^R \colon w \in \{a, b\}^*\}.$$

Αυτό είναι σαν το ΑΣ του προηγούμενου παραδείγματος με τη μόνη διαφορά ότι τώρα δεν υπάρχει το c και το ΑΣ πρέπει να μαντεύει πότε βρίσκεται στο μέσο της λέξης, οπότε πρέπει να περνά στη τελική κατάσταση χωρίς να αλλάζει τη στοίβα.



$$\begin{aligned}
M &= \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\}, Q \;=\; \{q_0, q_f\},\\
\Sigma &= \{a, b\} \;=\; \Gamma, Z_0 \;=\; \varepsilon, F \;=\; \{q_f\}\\
\delta(q_0, a, \varepsilon) &= (q_0, a),\\
\delta(q_0, b, \varepsilon) &= (q_0, b),\\
\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) &= (q_f, \varepsilon),\\
\delta(q_f, a, a) &= (q_f, \varepsilon),\\
\delta(q_f, b, b) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Προφανώς, για κάθε λέξη του L θα υπάρχουν υπολογισμοί που δεν τερματίζουν (όταν γίνεται η κίνηση $\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = (q_f, \varepsilon)$ τη λάθος στιγμή) αλλά πάνα θα υπάρχει ένας υπολογισμός που θα τερματίζει. Π.χ., για τη λέξη *babbab*:

Υπολογισμός που *δεν* τερματίζει:

$$\begin{aligned}
(q_0, babbab, \varepsilon) &\vdash (q_0, abbab, b)\\
&\vdash (q_f, bbab, ab),
\end{aligned}$$

όπου η λέξη τώρα κολλά, γιατί έχει να διαβάσει το b, χωρίς όμως να υπάρχει b στην κορυφή της στοίβας.

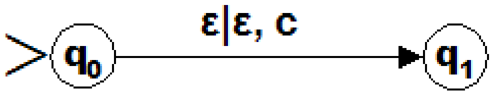
Υπολογισμός που τερματίζει:

$$\begin{aligned}(q_0, babbab, \varepsilon) &\vdash (q_0, abbab, b)\\ &\vdash (q_0, bbab, ab)\\ &\vdash (q_0, bab, bab)\\ &\vdash (q_f, bab, bab)\\ &\vdash (q_f, ab, ab)\\ &\vdash (q_f, b, b)\\ &\vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

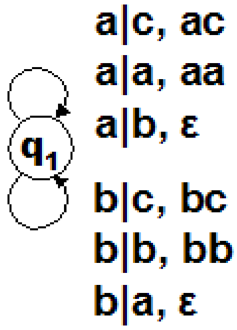
Παράδειγμα 4: Θα σχεδιάσουμε το ΑΣ που δέχεται τη γλώσσα:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \colon n_a(w) = n_b(w)\}.$$

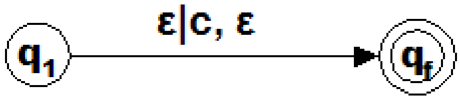
(1) Για να ξέρουμε από πότε αρχίζουμε την μέτρηση των a, b, με το που ξεκινάμε μια λέξη, βάζουμε το σύμβολο c στην στοίβα, πρίν ακόμη αρχίσουμε να διαβάζουμε τα σύμβολα της λέξης. Έτσι, πάμε στην κατάσταση q_1.



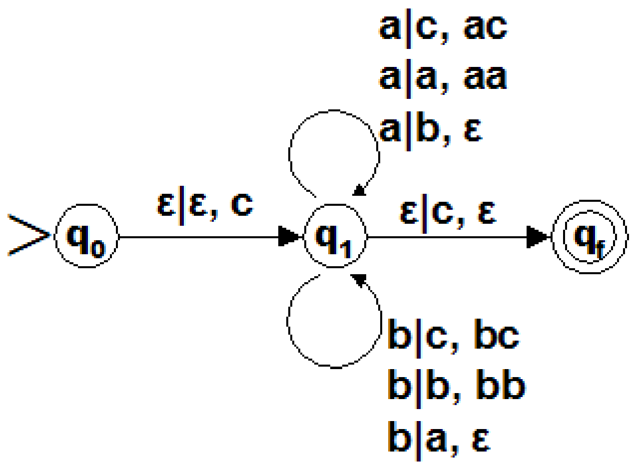
(2) Στη συνέχεια, μένουμε στην κατάσταση q_1, διαβάζοντας τα σύμβολα της λέξης. Ας πούμε, το πρώτο σύμβολο της λέξης είναι a. Τότε, το βάζουμε στη στοίβα και, για κάθε a που θα εμφανισθεί, το προσθέτουμε στη στοίβα, ενώ όταν έρχεται b, βγάζουμε το a από τη στοίβα. Όταν φθάνουμε πάλι στο c, σημαίνει ότι έχουμε μετρήσει το ίδιο πλήθος a και b.



(3) Όταν η λέξη τελειώσει κι έχουμε το c στη στοίβα, πάμε αυτομάτως στην τελική κατάσταση q_f, βγάζοντας το c από τη στοίβα.



Συνολικά το ΑΣ είναι:



$$
\begin{aligned}
M &= \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\}, Q = \{q_0, q_1, q_f\}, \\
\Sigma &= \{a, b\},\ \Gamma = \{a, b, c\},\ Z_0 = \varepsilon,\ F = \{q_f\}, \\
\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) &= (q_1, c), \\
\delta(q_1, a, c) &= (q_1, ac), \\
\delta(q_1, a, a) &= (q_1, aa), \\
\delta(q_1, a, b) &= (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, b, c) &= (q_1, bc), \\
\delta(q_1, b, b) &= (q_1, bb), \\
\delta(q_1, b, a) &= (q_1, \varepsilon), \\
\delta(q_1, \varepsilon, c) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Πορεία της λέξης *abbbabaa*:

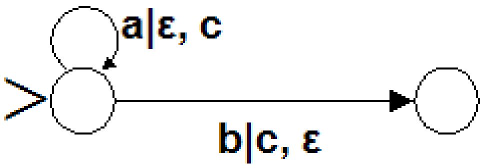
$$
\begin{aligned}
(q_0, abbbabaa, \varepsilon) &\vdash (q_1, abbbabaa, c) \vdash (q_1, bbbabaa, ac) \vdash \\
&\vdash (q_1, bbabaa, c) \vdash (q_1, babaa, bc) \vdash \\
&\vdash (q_1, abaa, bc) \vdash (q_1, baa, bc) \vdash \\
&\vdash (q_1, aa, bbc) \vdash (q_1, a, bc) \vdash \\
&\vdash (q_1, \varepsilon, c) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 5: Θα σχεδιάσουμε το ΑΣ που δέχεται τη γλώσσα

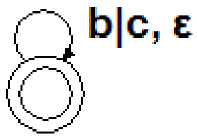
$$L = \{a^n b^n : n \geqslant 1\}.$$

- Κάθε φορά που διαβάζουμε a, βάζουμε ένα c στη στοίβα

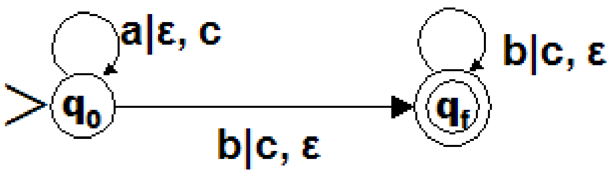
- Την πρώτη φορά που θα διαβάσουμε b, αλλάζουμε κατάσταση και βγάζουμε ένα c από τη στοίβα:



- Η νέα κατάσταση είναι η τελική, όπου για κάθε b βγάζουμε ένα c από τη στοίβα:



Συνολικά:

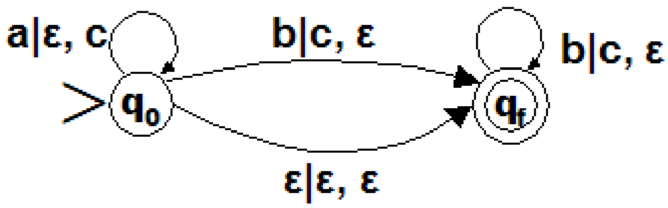


$$
\begin{aligned}
M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F),\ Q \;=\; \{q_0, q_f\},\\
\Sigma &= \{a, b\},\ \Gamma \;=\; \{c\},\ Z_0 \;=\; \varepsilon,\ F \;=\; \{q_f\}.\\
\delta(q_0, a, \varepsilon) &= (q_0, c),\\
\delta(q_0, b, c) &= (q_f, \varepsilon),\\
\delta(q_f, b, c) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Πορεία της λέξης $aaabbb$:

$$
\begin{aligned}
(q_0, aaabbb, \varepsilon) &\vdash (q_0, aabbb, c) \vdash (q_0, abbb, cc) \vdash\\
&\vdash (q_0, bbb, ccc) \vdash (q_f, bb, cc) \vdash\\
&\vdash (q_f, b, c) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned}
$$

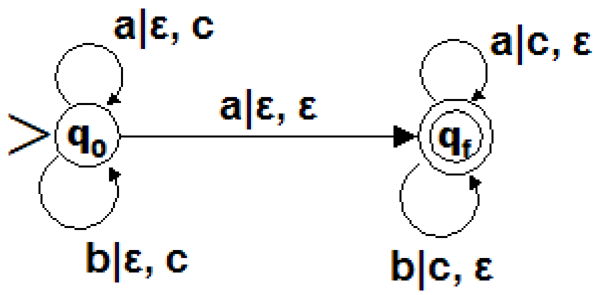
Παρατήρηση: Αν είχαμε τη γλώσσα $\{a^n b^n : n \geqslant 0\}$, θα έπρεπε να προσθέταμε μια τετριμένη μετάβαση:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω το ΑΣ $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ με

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_f\},\ \Sigma = \{a, b\},\ \Gamma = \{c\}, \\
Z_0 &= \varepsilon,\ F = \{q_f\}, \\
\delta(q_0, a, \varepsilon) &= \{(q_0, c), (q_f, \varepsilon)\}, \\
\delta(q_0, b, \varepsilon) &= (q_0, c), \\
\delta(q_f, a, c) &= (q_f, \varepsilon), \\
\delta(q_f, b, c) &= (q_f, \varepsilon).
\end{aligned}
$$



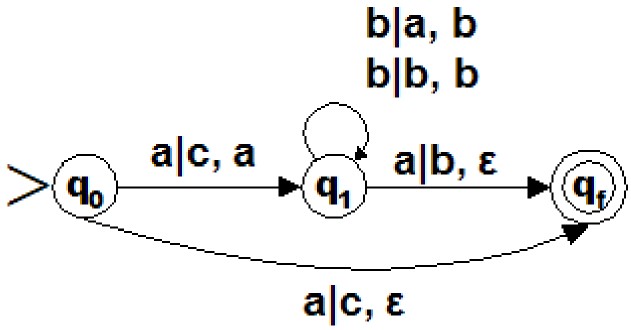
(i) Δείξτε ότι οι λέξεις aba, aa, abb δεν αναγνωρίζονται.

(ii) Δείξτε ότι οι λέξεις $baa, bab, baaaa$ αναγνωρίζονται.

(iii) Ποιά είναι η αναγνωριζόμενη γλώσσα $N(M)$;

2. Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το ΑΣ:

$$
\begin{aligned}
M &= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F),\ Q = \{q_0, q_1, q_f\}, \\
\Sigma &= \{a, b\},\ \Gamma = \{a, b, c\},\ Z_0 = c,\ F = \{q_f\}, \\
\delta(q_0, a, c) &= \{(q_1, a), (q_f, \varepsilon)\}, \\
\delta(q_1, a, b) &= (q_f, \varepsilon), \\
\delta(q_1, b, a) &= (q_1, b), \\
\delta(q_1, b, b) &= (q_1, b).
\end{aligned}
$$



3. Σχεδιάστε το ΑΣ για τις παρακάτω γλώσσες:

   (i) $\{a^n b^{2n} \colon n \geqslant 0\}$,

   (ii) $\{a^n b^m \colon n \leqslant m \leqslant 3n\}$,

   (iii) $\{w \in \{a, b\}^* \colon w = w^R\}$,

   (iv) $\{w \in \{a, b\}^* \colon n_b(w) = 2n_a(w)\}$,

   (v) $\{w \in \{a, b\}^* \colon n_a(w) = w_b(w) + 1\}$,

   (vi) $\{a^n b^m c^{n+m} : n, m \geqslant 0\}$.